技術論文

流体構造連成とシステム同定による複合モード翼列フラッター解析手法

Multimode Cascade Flutter Analysis Based on Fluid-Structure Interaction Simulation and System Identification

立石 敦[*1]
TATEISHI Atsushi

渡辺 紀徳[*2]
WATANABE Toshinori

姫野 武洋[*2]
HIMENO Takehiro

ABSTRACT

A new framework of aero-structure integrated analysis is presented for the prediction of cascade flutter. The proposed analysis method considers effects of the airflow on blade vibration such as change in frequency and mode-shape based on a fluid-structure interaction (FSI) simulation and system identification technique. The aeroelastic system of vibrating cascade is identified from the free response of blade vibration obtained from a time-domain FSI simulation. Aeroelastic eigenmodes, which describe blade frequency, damping rate, and modeshape in the airflow, are obtained directly from an eigenanalysis of identified aeroelastic system. The approach is validated through comparison with semi-analytical reference solutions obtained by LINSUB program. The comparison of aeroelastic eigenmodes shows that the proposed approach is capable of obtaining flutter characteristics accurately even under the presence of aerodynamic coupling among structural modes.

Key words : Aeroelasticity, Cascade Flutter, Light-weight structure, Fluid-structure interaction, System identification

1．緒言

高バイパス比ターボファンエンジンは，推進効率を高めるためにバイパス比が上昇する傾向にあり，ファン外径は増加の一途を辿っている。更なるバイパス比向上を実現するためには，ディスクやファンケースの強度に対する要求を緩和するために，動翼の軽量化が不可欠であるといえる。そのため中空加工や複合材料の使用，薄肉化といった技術が実機エンジンに適用されている(1)。

フラッターは翼の振動に伴い生じる空気力により翼振動が増幅される自励振動で，一般に複数の構造振動モード間での空気力による連成が存在する。しかし，翼列の場合は，慣例的に翼構造が十分剛であるという仮定のもと，翼振動モード間の空力的な連成は無視されてきた。そのため，今後いっそう翼構造の軽量化が進んだ場合に生じうる翼振動形態は全く調査されていない。また，1980年代に精力的に研究されたAdvanced Turbo Propeller や Unducted Fan と呼ばれる高速プロペラ，およびオープンロータ(2)では，作動中の翼振動特性が気流の影響で真空中のものから大きく変化し，曲げモードとねじりモードが連成する複合モードフラッターが生じる(3)。この場合の振動特性の検討には，流体・構造連成解析（FSI）が必須となる。

振動特性が流れの影響を強く受ける場合のフラッターに関する先行研究として，古くは花村による曲げねじりフラッターの研究(4)，1980年代のAdvanced Turbo Propeller / Unducted Fan に対する研究(3),(5)-(6)，近年の類似研究にはClark(7)のものがある。これらでは空気力モデルに揚力面理論が用いられているため初期検討や感度解析には有効だが，近年主流のCFDに基づくフラッター解析と比較すると，流れ場が理想的な場合に限られ，詳細な検討には適さない。近年Mayorca(8)は翼構造にグヤン縮退を用いた自由度縮小型有限要素モデルを採用し，各自由度に対する空気力データベースを非定常CFDにより構築した後，振動方程式の固有値問題を近似的に解く汎用性の高い手法を提案している。しかし，１つの作動点に対する解析でも代数的空気力モデルの構築に「構造モデル自由度数×翼間位相差数×無次元振動数ケース」という膨大な非定常CFDの解析ケースが必要なのが実用上の欠点である。このように，複合モード翼列フラッターの検討でかつて用いられてきた古典的手法を現代的な数値解析で代替する実用的な手法は現状として存在しない。

原稿受付 2015年12月25日
校閲完了 2016年６月30日

＊1 東京大学大学院工学系研究科航空宇宙専攻
日本学術振興会 特別研究員PD
〒113-8656 文京区本郷７－３－１
＊2 東京大学大学院工学系研究科航空宇宙専攻

以上のような研究状況から，空気力と翼振動の相互作用という原理に立ち返り，長い年月を経て発展してきた数値解析手法の長所を取り込みながら，軽量構造に対する新たな翼振動解析手法を確立することの意義は大きい。

本研究では，まず，気流と翼振動の相互作用を的確に模擬するための数値解析手法である双方向のFSIに着目し，手法の構築を行った。加えて，FSIを用いてフラッターのような自励振動を解析する際に重要な概念となる「空力弾性モード」を連成解析結果から算出する手法を提案する。実用的な系への応用を念頭に置き，本報では，空力弾性モード同定の原理，数値解析手法の概要，理論解との比較を通じた検証に関し報告する。

2．翼振動の解析手法

2.1 翼列・多重モードの空力弾性方程式

流れ中における翼振動は，変動流体力を含む翼振動の運動方程式である空力弾性方程式に支配される。フラッターは一般に低次の振動モードが関わるため，翼構造のみから定まる下位N_f個の構造振動モードに振動自由度を取ると，運動方程式は一般に以下の形で表せる。

$$\ddot{\boldsymbol{q}} + \Lambda \boldsymbol{q} = \boldsymbol{f}_{FR} + \boldsymbol{f}_{SE} \tag{1}$$

行列Λ，ベクトル$\boldsymbol{q}$はそれぞれ構造振動モード剛性行列，モード変位ベクトルである。モード質量行列は単位行列となるよう規格化されている。右辺は変動空気力のモーダル力ベクトルであり，翼の運動に由来して生じない成分である強制空気力$\boldsymbol{f}_{FR}$と，翼の運動によって生じる成分である自励空気力$\boldsymbol{f}_{SE}$に分類される。また，ここでは単純化のため構造減衰を0とする。構造振動モードの導入により左辺は対角化されているため，構造振動モード間の連成は右辺の自励空気力を介してのみ生じる。

フラッターは自励空気力と翼振動の連成で生じる現象であるため，$\boldsymbol{f}_{FR}$を無視し，$\boldsymbol{f}_{SE}$のみを考慮する。ここでは翼振動を微小振幅として取り扱う。$\boldsymbol{f}_{SE}$は自励空気力であるため，翼振動変位・速度，自励空気力係数行列A, Bを用いた線形結合，

$$\boldsymbol{f} = A\boldsymbol{q} + B\dot{\boldsymbol{q}} \tag{2}$$

で表す。自励空気力として全ての翼の運動を考慮に入れ，翼列中の全ての翼に対して運動方程式を立てると次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{q}}_1 \\ \vdots \\ \ddot{\boldsymbol{q}}_{Nb} \end{bmatrix} + \mathrm{diag}(\Lambda)\begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{q}_{Nb} \end{bmatrix} = [A_{ij}]\begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{q}_{Nb} \end{bmatrix} + [B_{ij}]\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{Nb} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Eq. (3) が翼列全体に対する自由振動の振動方程式であり，N_bは翼枚数である。なお，ここでは問題を簡略化するために，以下の仮定を置いている。

1. 翼は十分剛なディスクに植え付けられており，ディスクやシュラウドを介した自由度間の連成は無い。
2. 全ての翼は同一形状で同一の機械的性質を持つ。
3. 全ての翼は同一の流れ状態下にある。
4. 自励空気力係数行列A, Bは時不変な量である。

仮定1はEq. (3) がディスクの変位や剛性行列の非対角成分を含んでいないこと，仮定2はモード剛性行列およびモード形状行列が全ての翼で等しいことで反映されている。また，仮定2，3より，自励空気力係数行列A, Bは翼列周方向に回転対称性を持つため，Eq. (4) に示すブロック巡回行列として表現される[(9)-(10)]。

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_{N_b} \\ A_{N_b} & A_1 & \cdots & A_{N_b-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_2 & \cdots & A_{N_b} & A_1 \end{bmatrix}, [B_{ij}] = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_{N_b} \\ B_{N_b} & B_1 & \cdots & B_{N_b-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ B_2 & \cdots & B_{N_b} & B_1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

2.2 翼列の空力弾性モード

気流中における翼列の自由振動は，Eq. (3) の自由振動解で表現され，その安定性は固有値問題の解より判定できる。λを固有値，$\boldsymbol{\psi}$を固有ベクトルとし，Eq. (3) を固有値問題にするとEq. (5) となる。

$$\lambda\begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi} \\ \lambda\boldsymbol{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & I \\ -\mathrm{diag}(\Lambda) + [A_{ij}] & [B_{ij}] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi} \\ \lambda\boldsymbol{\psi} \end{bmatrix} \tag{5}$$

Eq. (5) を解くことで，複素固有値λ，複素モード形状$\boldsymbol{\psi}$が全自由度数N_bN_f個求まる。Eq. (3) の固有モードは自励空気力を考えない構造振動モードとは異なり，空力弾性モードと呼ばれる。λは自由振動解における時間方向の情報を表す。空力弾性モード減衰率μ_{AE}，モード振動数f_{AE}は，λの実部，虚部からEq (6) で求まる。μ_{AE}の符号が負の際，翼振動は負減衰となり自励振動であるフラッターが生じる。また，$\boldsymbol{\psi}$の各成分は解の空間方向の情報を表し，自由度間の振幅比・位相差（例えばたわみモードとねじりモードの間）を求めることができる。

$$\mu_{AE} = -\mathrm{Re}(\lambda) \quad , \quad f_{AE} = |\,\mathrm{Im}(\lambda)\,| / 2\pi \tag{6}$$

なお，塩入[(8)]が述べているように，仮定2,3のもとでは運動方程式は周期対称性をもち，隣接翼との振幅・位相差が一定の複素モード形状が固有方程式の解となるため，単一構造振動モードの解析においては一自由度振動系に帰着する。しかし，モード間の空力的連成やミスチューニングを含む場合には固有値問題を解く必要がある。

Eq. (3) からわかる通り，空力弾性モードの算出には自励空気力係数A, Bが必要である。しかし，これらは非定常CFDを行う前にはわからない。そのため，何らかの方法を用いてA, Bを決定する必要がある。

2.3 翼列全体の空力弾性システムの同定

翼列に対する実験的な自励空気力の計測には，決まった翼間位相差や振動モードで翼を強制加振した際の空気力応答を計測し，自励空気力係数を取得する強制振動法が用いられる。同様のアプローチはCFDを用いた自励空気力の算出においても一般に用いられている。

しかし，複数の構造振動モードを考える際には，少なくとも考慮する構造振動モードの数だけのCFD解析が必要となり計算コストが大きい。また，A, Bは翼の振動数に依存するため，CFD解析で与える翼振動数と，流れの影響により変化した翼振動数の差にも注意する必要がある。そのため，いかに効率よく空力弾性方程式 Eq. (3) を非定常CFD結果から構築し，翼列全体の自由振動特性を得るかが，実用的な系で多自由度のフラッター解析を行う上での鍵となる。そこで本研究では，既往研究にみられる翼強制加振時の空気力応答計測ではなく，流体・構造間の相互作用が自動的に考慮されるFSIと，システム同定の考え方に基づく新たな翼列フラッター解析手法を提案する。

数値解析においては，Eq. (3) における未知項は自励空気力係数A, Bのみである。また仮定4に挙げたように，時間平均流れが過渡的に変化しないような短い時間を考えた場合，A, Bは時不変であるとみなせる。そのもとでは翼振動がEq. (3) に支配されることから，FSIで得た翼振動の時間履歴を用いてA, Bを決定する手続きを考えることができる。

まず翼変位履歴が既知という状況でA, Bを未知ベクトルとして再定義すると，Eq. (3) 右辺の自励空気力変位同期項はEq. (7)，Eq. (8) のように書き換えられる。

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_{N_b} \\ A_{N_b} & A_1 & \cdots & A_{N_b-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_2 & \cdots & A_{N_b} & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ \\ \boldsymbol{q}_{N_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & \cdots & Q_{N_b} \\ Q_2 & \cdots & Q_{N_b} & Q_1 \\ \vdots & \iddots & & \vdots \\ Q_{N_b} & Q_1 & \cdots & Q_{N_b-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_{N_b} \end{bmatrix} = \widetilde{Q}_A \boldsymbol{A} \tag{7}$$

$$A_i = [A^{11} A^{12} \cdots A^{N_f N_f}]_i^T, \quad Q_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_i^T & & & \\ & \boldsymbol{q}_i^T & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{q}_i^T \end{bmatrix} \tag{8}$$

ここで，部分ベクトル$\boldsymbol{A}_i$，部分行列Q_iはそれぞれi番目の翼振動変位に同期する自励空気力係数行列を1次元のベクトルとして再定義したものと，その係数であるi番目翼のモード変位を成分とする行列である。また，翼振動速度変位同期成分についても同様の変形を施す。さらに見通しの良い定式化を得るために，慣性力・弾性力の総和であるEq. (3) の左辺をEq. (9) のようにベクトル$\boldsymbol{R}$と再定義する。

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{q}}_1 \\ \vdots \\ \ddot{\boldsymbol{q}}_{Nb} \end{bmatrix} + \mathrm{diag}(\Lambda) \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{q}_{Nb} \end{bmatrix} \tag{9}$$

するとEq. (8)，Eq. (9) を用いて，Eq. (5) の運動方程式はEq. (10)の形に書き換えられる。ここでXは任意時刻のモード変位・速度を成分とする行列，$\partial\boldsymbol{F}$は未知量である自励空気力係数行列である。

$$\begin{bmatrix} \widetilde{Q}_A & \widetilde{Q}_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix} = \boldsymbol{R} \Leftrightarrow X\partial\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R} \tag{10}$$

この形式を基にして自励空気力係数を決定する。図1は翼振動のFSIによって翼のモード変位がサンプルされる様子を表している。時刻$t = t_1$ から$t = t_{Kd}$のK_d個の時刻において，全ての翼に対してモード変位，速度，加速度のサンプルを行う。すると各時刻でX，$\boldsymbol{R}$が求まるので，$\partial\boldsymbol{F}$が時不変であるという仮定の下に，Eq. (11) の過剰決定連立一次方程式が導ける。

$$\begin{bmatrix} X(t_1) \\ \\ X(t_{K_d}) \end{bmatrix} \partial\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}(t_1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{R}(t_{K_d}) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \hat{X}\partial\boldsymbol{F} = \hat{\boldsymbol{R}} \tag{11}$$

上式に基づき，サンプルされた翼変位データを最も良く説明する自励空気力係数行列を，最小二乗法を用いてEq. (12) で求める。求まった係数行列を用い固有値解析を行うことで，翼列における空力弾性モードを算出することができる。

$$\partial\boldsymbol{F} = (\hat{X}^T \hat{X})^{-1} \hat{X}^T \hat{\boldsymbol{R}} \tag{12}$$

なお，実験的手法で用いられるシステム同定手法としてはカルマンフィルタを応用したものや，ランダムデック[11]により生成された自由振動波形を用いる方法がある。本研究では翼振動の信号が連成シミュレーションによって生成されることから，最もシンプルだと考えられる，最小二乗法を用いたものを採用している。

2.4　空力弾性モードの同定不確かさに関する指標

ここまで展開した空力弾性モードの同定過程においては最小二乗法が用いられていることから，同定結果の質に対して常に配慮するのが望ましい。同定結果の質を考

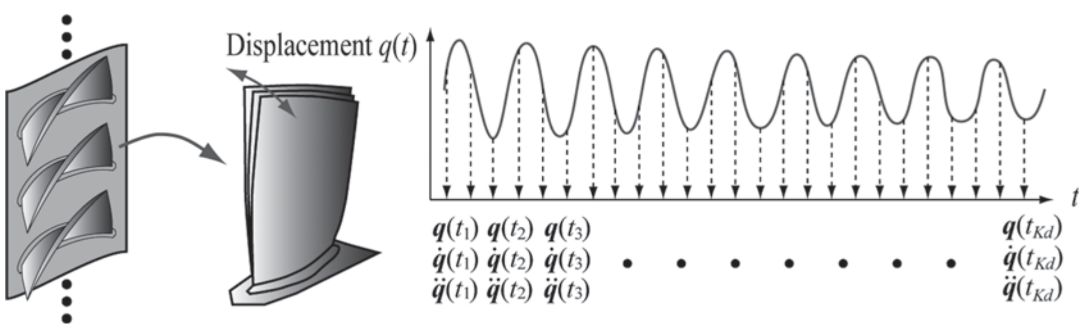


Fig. 1　Sampling of blade vibration from time history obtained by FSI

える際に，まず同定結果の自励空気力係数行列を$\partial\overline{\boldsymbol{F}}$と表す。$\partial\overline{\boldsymbol{F}}$を用いた際に生じる，$t_1$ ～ t_{Kd}までの全時刻に対する運動方程式の残差として，誤差ベクトル$\boldsymbol{\varepsilon}$がEq. (13) と定義できる。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \hat{\boldsymbol{R}} - \hat{X}\partial\overline{\boldsymbol{F}} \tag{13}$$

最も単純な最小二乗法結果の品質を表す指標は，決定係数R^2値である。これは同定結果から生じる運動方程式残差をEq. (11) 右辺で規格化したもので，Eq. (14) で表せる。R^2は０から１の値を取り，１に近いほどシグナルに用いた翼振動履歴より求めた同定結果が，想定している線形化自励空気力モデルを用いた運動方程式に当てはまっていることを示している。

$$R^2 = 1 - \boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\varepsilon} / \hat{\boldsymbol{R}}^T\hat{\boldsymbol{R}} \tag{14}$$

次に，同定した空気力係数の分散共分散行列Σ^2は，誤差の伝播に対する検討を単純化するために，誤差ベクトルの各成分に平均０，無相関であることを仮定する。このとき，誤差ベクトルの各成分に対する分散をσ^2として，次式で求められる[12]。

$$\Sigma^2 = (\hat{X}^T\hat{X})^{-1}\sigma^2 \tag{15}$$

最小二乗法に起因して生じ，同定した空力弾性モード固有値に伝播した不確かさを評価する際には，固有値問題の求解過程が含まれるため，線形変換で不確かさの伝播を考えることができない。したがって，平均$\partial\overline{\boldsymbol{F}}$，分散共分散$\Sigma^2$の多次元正規分布として$\partial\boldsymbol{F}$の不確かさをモデル化し，この不確かさでばらつく自励空気力係数を用いて多数回の固有値解析を行う，モンテカルロ法によって同定された空力弾性モードの統計的不確かさを求めた。以降，特に断らない限り，同定結果の固有値分布には99％信頼区間幅を合わせて示している。

３．流体−構造連成解析

前述の時間領域空力弾性モード同定手法は，流体構造連成解析により算出された翼振動の時間履歴に適用されることから，本節では連成解析の手法に加え，物理的に妥当な振動解析を行うためのFEM/CFDソルバ間での流体力・構造変位の受け渡しについて述べる。図２に，時間領域の流体構造連成解析において１時間ステップを進める際のフローチャートを示す。まず求まっている最新の固体壁上の空気力を構造ソルバにマッピングし，解析対象時刻（新時刻）の翼変位を求める。ここで得られた変位を流体ソルバに転送し，新時刻における流体の諸量を求める。流体・固体双方で新時刻の量が求まったら，両者が十分収束したかを確認し，次のステップに進む。連成解析は，このように内部反復を繰り返し新時刻の量を逐次更新する漸近的強連成によって行われる。

3.1　流体・固体の数値計算手法

本研究では，マルチブロック有限体積法による圧縮性

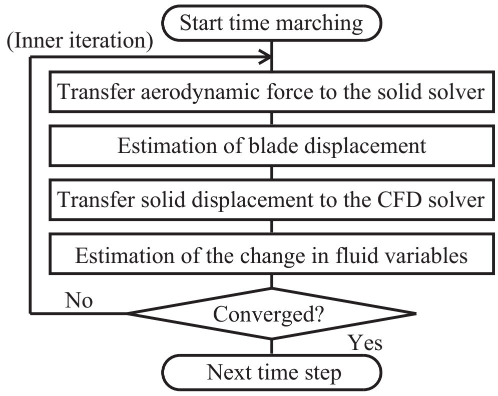


Fig. 2　Flowchart of FSI computation

流体解析と，翼の微小振動の運動方程式を組み合わせた連成解析コードを使用する。流体の解法は翼振動を模擬するためArbitrary Lagrangian – Eulerian型の支配方程式を使用し，有限体積的な移動格子法を導入した。非粘性流束はSHUS[13]により評価する。時間進行法として，定常流れ解析ではEuler陰解法による局所時間刻み法を，翼振動解析では陰的な二次精度三点後退差分法を３回の内部反復と組み合わせて用いる。陰解法は圧力，速度，温度の基本変数に対して構築し，Red-Black Gauss-Seidel法により線形反復の圧力残差が初期の1/10になるまで反復する[14]。翼振動の解析は，各構造振動モードの運動方程式を解き変位を重ねあわせるモード合成法を用いる。

3.2　仕事保存型の流体力受け渡し法

以上の解析枠組みで解析のロバストさや複雑な系の扱いやすさを決定するのが，離散化の位置や量の定義が異なる固体ソルバと流体ソルバを結びつける手法である。また，特にフラッター解析では空力仕事の総和により翼振動の減衰・発散が決まるため，空気力による仕事が保存するような空気力/構造変位の転送手法[15-16]を用いた。

仕事保存型のデータ転送手法は，仮想仕事原理に基き，流体格子上の変位・空気力を$\boldsymbol{u}_a$, $\boldsymbol{F}_a$, 構造モデル上の変位・空気力を$\boldsymbol{u}_s$, $\boldsymbol{F}_s$ と表すと，両モデル上で仕事の一致する条件,

$$(\mathrm{Work}) = \boldsymbol{u}_a^T\boldsymbol{F}_a = \boldsymbol{u}_s^T\boldsymbol{F}_s \tag{16}$$

に基く。ここで，流体格子上の変位$\boldsymbol{u}_a$ が構造モデル変位に対し行列G^Tを用い線形に内挿されるとき，仕事の保存関係から，流体力も同じ行列Gを用いて

$$\boldsymbol{u}_a = G^T\boldsymbol{u}_s, \quad \boldsymbol{F}_s = G\boldsymbol{F}_a \tag{17}$$

と算出すればよい。この関係を満足する定式化で，かつ離散化位置や格子密度の不一致に対してロバストな手法として，本研究では移動最小二乗法[17]を採用した。

3.3　移動最小二乗法による構造変位の受け渡し

図３に移動最小二乗法（Moving Least Squares, MLS）の模式図を示す。MLSでは，周辺の値の距離に

応じた重みつき最小二乗法によって内挿を受ける点における値が定まる。内挿係数は最終的に，基底関数ベクトル$\boldsymbol{p}$, 内挿位置と周囲の点との距離rによって決まる重み関数w, N個の周辺の点を用いてEq. ⒅～⒇で算出される。ここで，重み関数wには，メッシュレス法で物理量再構築に用いられる重み関数の１つであり，Eq. ⒇で表わされる４次スプライン関数を用いた。また，重み基準半径r_0として構造モデルの最大格子幅を用いた。

$$G^T = \boldsymbol{p}(x_f)^T (P^T W P)^{-1} P^T W \tag{18}$$

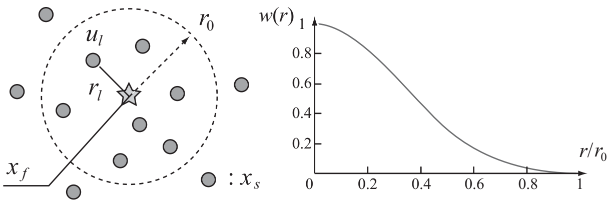
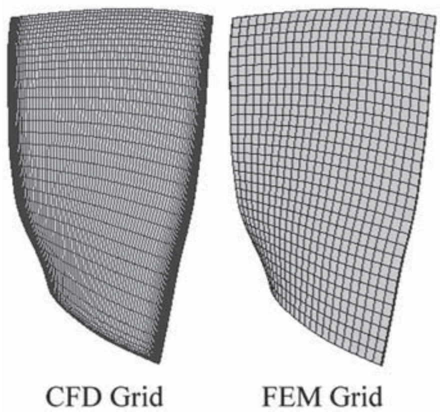
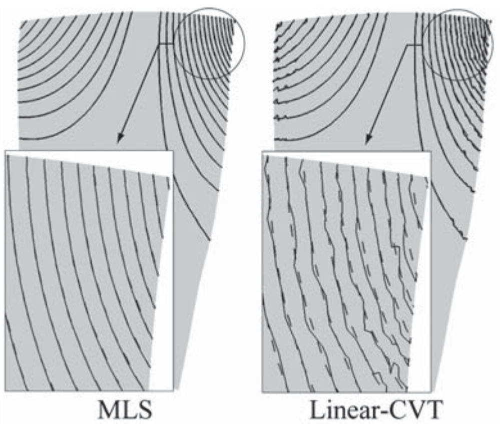


Fig. 3 Mapping of blade displacement by moving least squares interpolation



⒜Typical CFD and FEM grids for aeroelasticity simulations



⒝Interpolated blade displacement of 1T mode. Solid line: interpolated displacement on the CFD grid, dashed line: displacement on the FEM grid（Source）

Fig. 4 Comparison of mapping methods of the blade displacement（MLS and Linear-CVT）

$$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_1)^T \\ \\ \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_N)^T \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} w(r_1) & & \\ & \ddots & \\ & & w(r_N) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_s = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} \tag{19}$$

$$w(r) = 1 - 6(r/r_0)^2 + 8(r/r_0)^3 - 3(r/r_0)^4$$
$$\boldsymbol{p}^T = [1\ x\ y\ z\ xy\ yz\ zx] \tag{20}$$

図４に，本研究で用いるMLS法と，Sadeghiらが提案する線形内挿法の一種であるLinear-CVT[16]を用いた動翼１次ねじりモード変位の内挿結果を比較して示す。Linear-CVT 法は近傍３点を用いる局所的な内挿手法であり，CFD格子上の前縁・後縁で微小な凹凸が生じてしまう。一方，MLS法を用いると等高線がずれることなく滑らかに補間されており，本手法による変位マッピング手法によって３次元的なFEMモデル・CFD格子間のデータ交換がロバストに実現されていることがわかる。

４．半解析解との比較による検証

本研究で提案する空力弾性モードの同定に基づくフラッター解析手法が気流中における翼列の振動特性を的確に捉えられるかを検証する。「空力弾性モード」は複数のモードが干渉しあう場合のフラッター解析において重要な概念であるが，検証として参照できるデータは存在しない。そのため本研究では同定された空力弾性モードの評価に際して構造モデルや流れ条件の違いに伴う一切の不確かさを排除するために，半解析解の存在する空力弾性問題を参照解として設定する。検証は，同定された各空力弾性モードに対して振動数，減衰率，モード形状を参照解と比較することによって行う。

4.1　系の設定

検証に供する解析モデルとして，非粘性の亜音速流中に迎角０で弾性支持された平板翼列を考える。翼列の仕様と一様流の範囲を図５と表１に示す。この系では，一様流速を上げていくと次第に減衰率が低下し，ある流速で負減衰に転じフラッターが発生する。一様流速は上流の全圧・全温が一定に保たれている，ブローダウン型のフラッター試験を想定し変化させた。

この平板翼列系に対する半解析的な自励空気力のモデルとして，Whiteheadにより開発されたLINSUBプログラム[18]を用いた。LINSUBは二次元の揚力面理論によって，一様流中で０迎角まわりに平板翼列が振動したときの自励空気力の微係数を算出する。LINSUBの入力パラメタは，ピッチコード比s/c，スタガ角θ，無次元振動数k，翼間位相差IBPA，一様流マッハ数Maである。

4.2　構造モデル

図６に検証に供した構造モデルを示す。各平板翼は翼弦中央に重心をもち，重心まわりのねじり運動αと重心の翼弦垂直方向の並進運動hが振動自由度として与えられている。この系では並進運動とねじり運動の慣性的な連成はなく，空力的にのみ両自由度は連成する。表２

に構造モデルのパラメタを示す。これらのパラメタは，$Ma < 0.5$の範囲でフラッターが生じるように予め試行錯誤によって定めた。

この構造モデルに対応する運動方程式は次で表せる。

$$\begin{bmatrix} m_b & 0 \\ 0 & I_b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h \\ \alpha \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} L \\ M \end{bmatrix} \tag{21}$$

右辺は平板に作用する揚力LおよびヒンジまわりのモーメントMを表している。m_b, I_b, K_h, K_αはそれぞれ翼質量，ヒンジまわり慣性モーメント，並進およびねじりばね定数である。空力弾性モードを求める際には，LINSUBによって得られた特定の無次元振動数翼間位相差に対する無次元自励空気力係数を次式

$$\frac{\partial L}{\partial h},\quad \frac{\partial L}{\partial \alpha},\quad \frac{\partial M}{\partial h},\quad \frac{\partial M}{\partial \alpha} \tag{22}$$

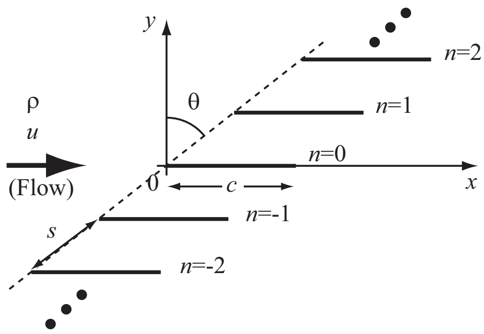


Fig. 5 Flat plate cascade configuration

Table 1 Flow condition of flat plate cascade

Pitch/Chord	s/c [-]	1
Stagger angle	ξ [deg]	45
Inlet total temperature	T_t [K]	288.15
Inlet total pressure	P_t [Pa]	101325
Range of inlet velocity	u [m/s]	0~166
Range of inlet Mach No.	Ma [-]	0~0.5

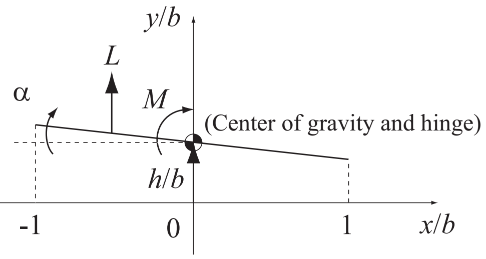


Fig. 6 Configuration of flat plate mechanical model

Table 2 Parameters of mechanical model

Span length	l [m]	0.05
Chord length	$c = 2b$ [m]	0.05
Blade mass	m_b [kg]	0.02
Inertia of momentum	I_b [kgm^2]	4.167×10^{-6}
Heaving stiffness	K_h [N/m]	3350
Pitching stiffness	K_α [Nm/rad]	10.3
Heaving natural frequency	f_h [Hz]	65.1
Pitching natural frequency	f_α [Hz]	250

で表わされる有次元の複素自励空気力係数に直し，p - k法によって反復的固有値問題を解いた。

4.3 フラッター解析方法の概要

流体構造連成解析においては，全翼枚数が有限でなくてはならないことから，全翼枚数を$N_b = 8$とし，ピッチ方向上端と下端は周期境界条件として接続した。この場合には，ねじり運動・並進運動が連成した8つの異なる翼間位相差（-135, -90, -45, 0, 45, 90, 135, 180[deg]）が空力弾性モードに現れ，全空力弾性モード数は翼列全体の全自由度数に等しい16個となる。

CFDの条件を設定する際には，LINSUBと極力等しい流れ条件となるよう，CFDでは非粘性のEuler方程式を解き，翼面上は断熱のすべり壁として扱った。翼振動時には流入・流出境界における擾乱の反射を防ぐため，Gilesの準一次元無反射条件(19)を用いた。また，翼厚みの効果を可能な限り小さくするために，翼弦長に対する翼厚みの比を0.001とした。図7に連成解析に用いた平板翼列のCFD格子を示す。流入部・流出部にはH型格子を配置し，平板翼はO型格子に包まれている。格子点数は翼弦方向に88点，ピッチ間に78セルである。なお，翼の番号はある翼に対して負圧面側に位置する翼の番号が大きくなるように定められている。

翼振動計算の初期条件には，ねじり・並進両モードに対して微小なモード速度（最大振幅で$2\times10^{-4}c$相当）を与えた。その際，ねじりモードに対しては1番の翼に，並進モードに対しては2番の翼に与えた。翼振動のデータサンプリングとして，ねじり振動2周期目から10周期目までの360サンプルを用いた。

4.4 自励空気力解析の検証

連成解析による検証に先立ち，LINSUBで想定する状況が本研究で用いるCFD手法を用いて正しく再現されることを示す。CFDで振動数固定，翼間位相差一定の翼振動解析を行い，Eq. (23) に示すねじり・並進両運動に対する自励空気力の空気力係数を，翼変位に対する実部と虚部にわけて取得する。ここで$\bar{\alpha}$, $\bar{h}$ はそれぞれねじり，並進運動の振幅である。

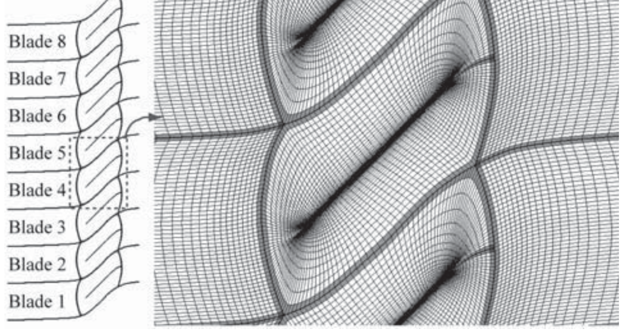
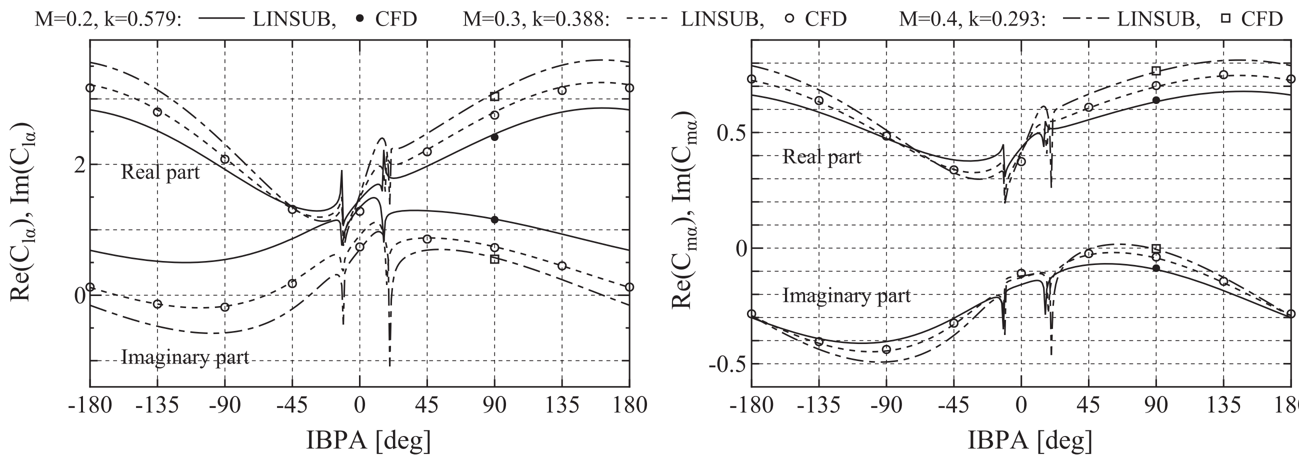
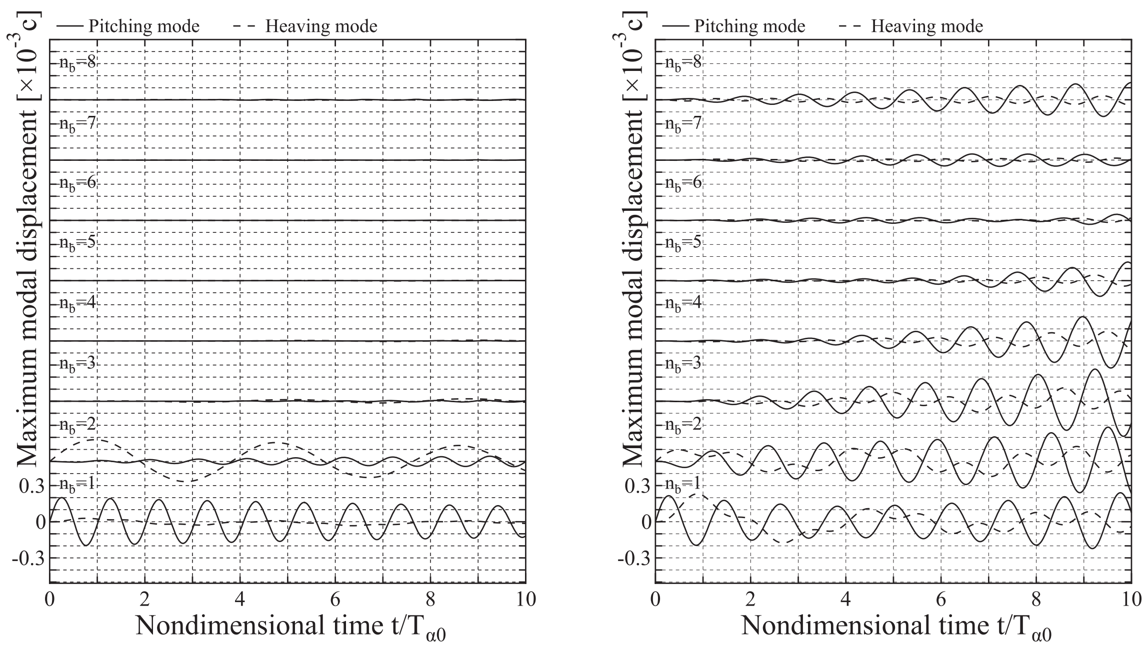


Fig. 7 Eight blades flat plate cascade configuration and CFD grid. Coloured cells are on the block boundary.



(a) $C_{l\alpha}$ (b) $C_{m\alpha}$

Fig. 8 Comparison of unsteady aerodynamic force coefficients between LINSUB (reference) and CFD results



(a) Stable case (Ma = 0.20, u = 68.1 m/s) (b) Severe flutter case (Ma = 0.50, u = 166 m/s)

Fig. 9 Examples of free response of the flat plate cascade

$$C_{l\alpha}=\frac{L}{\rho u^2 cl\overline{\alpha}},\quad C_{m\alpha}=\frac{M}{\rho u^2 c^2 l\overline{\alpha}},$$
$$C_{lh}=\frac{L}{\rho u^2 cl(\overline{h}/c)},\quad C_{mh}=\frac{M}{\rho u^2 c^2 l(\overline{h}/c)} \tag{23}$$

図8に，f_α＝250Hz の加振条件について，LINSUBとCFDで得られた空気力係数に対する比較を，代表として$C_{l\alpha}$, $C_{m\alpha}$を選んで示す。Ma = 0.3 の条件に対しては全8つの翼間位相差を，また流速を変化させた際の感度として Ma = 0.2, 0.4については翼間位相差90［deg］を表示している。翼間位相差・流速の変化ともにCFD結果は参照解と良好に一致している。そのため，これ以降連成解析結果を参照解と比較評価する際，空気力モデルに起因する差はほとんど無く，空力弾性モードの同定に関連して生じていると考えて良いといえる。

4.5 翼の自由振動応答

連成解析によって得られた翼列の自由振動応答を図9に示す。図9(a)はMa = 0.20 で翼振動が安定な場合であり，計算開始時に与えた初期擾乱が他の翼に伝わるものの激しい振幅の増大は見られない。一方，図9(b)は Ma = 0.50 でフラッターが発生する場合である。この場合には初期擾乱として1番翼に与えたねじり振動が振幅の増大を伴いながら他の翼に伝わっていることがわかる。増幅されている成分は，翼番号n ＝1の波形とn＝2の波形を比べるとn = 2のほうがおよそ90deg程度位相進みの状態にあるので，翼間位相差90度のTraveling wave modeであるといえる。また，並進自由度には元々の並進振動モードに近い長周期の振動に加えて，ねじり自由度に由来する短周期の振動が重畳していることから，ねじり・並進自由度は完全に独立ではなく，自由度間の

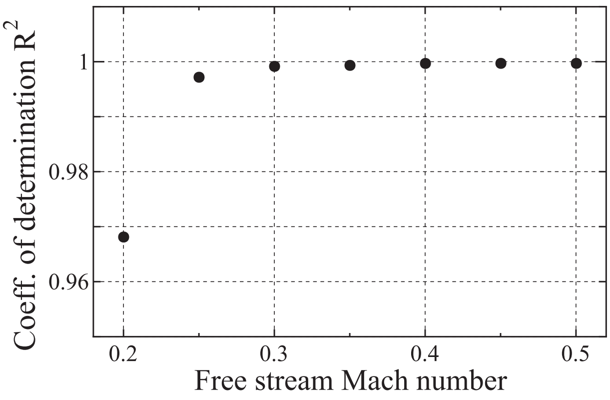


Fig. 10 R^2 values obtained at every simulation conditions

空力的な連成が存在し，振動特性が空気力の作用しない場合から変化している。

このように，シミュレーション結果としての波形から空気力による振動特性変化を確認できるが，空力弾性モードを同定することで定量的な比較を実施する。

4.6 同定精度の確認

図10に，Ma = 0.2からMa = 0.5の流れ場における同定時に算出された決定係数R^2値を示す。低いマッハ数側の点であるMa = 0.2 では他の点よりわずかに低い値をとっているものの，全ての計算点でR^2値は0.96以上となっており，自励空気力係数が翼振動の時間履歴を用いて十分よく説明されていることがわかる。したがって，結果としての空力弾性モードも精度よく求まっていることが期待される。

4.7 空力弾性モードとフラッター境界の比較

図11に，一様流マッハ数をスイープした際に，各空力弾性モードがどのように変化するかを，LINSUBによる参照解と連成解析からの同定結果を比較して示す。翼列系の空力弾性モードは計算で導入した全構造自由度数と等しい。したがって本検証の場合には16個が現れるが，全てを表示し議論するのは冗長である。そこで，ここでは代表としてStanding waveであるIBPA = 0, 180［deg］，フラッターに突入するモードであるIBPA = 90［deg］の３つに対し，ねじり自由度由来の空力弾性モードであるPitching branchと，並進自由度由来の空力弾性モードであるHeaving branchを合わせて表示している。

図11⒜に，空力弾性方程式の固有値から求まるIBPA = 0, 90, 180［deg］に対応する振動数と減衰率を示す。まず各翼間位相差で減衰率が異なっており，基本的な周期翼列系の空力減衰に関する性質を満足していることがわかる。また流速を増加させるとIBPA = 90［deg］は不安定化しフラッターが生じること，他２つでは空力減衰が増加し安定となる挙動が観察される。

フラッターは参照解，連成解析でそれぞれMa = 0.318, Ma = 0.312で生じ，参照解と数値解析結果は良好に一致している。さらに，フラッターが生じるマッハ数より少し高いMa = 0.35まではどの翼間位相差でもPitching branch，Heaving branchともに良好に参照解のトレンドを捉えている。以上より，フラッターが生じない範囲（サブクリティカル）からフラッターの発生点に近い不安定条件までの減衰率は，提案手法で的確に算出することができるといえる。

図11⒜より空力弾性モードの振動数を見ると，減衰率と同様に翼間位相差によって異なっている。参照解と同定結果はMa ≦ 0.35の範囲で良好に一致している。よって，減衰率のみならず揚力傾斜や付加質量効果に起因して生じる，気流中における翼振動の周波数変化に対しても，隣接翼の及ぼす効果を含めて提案手法は正しく予測できるといえる。

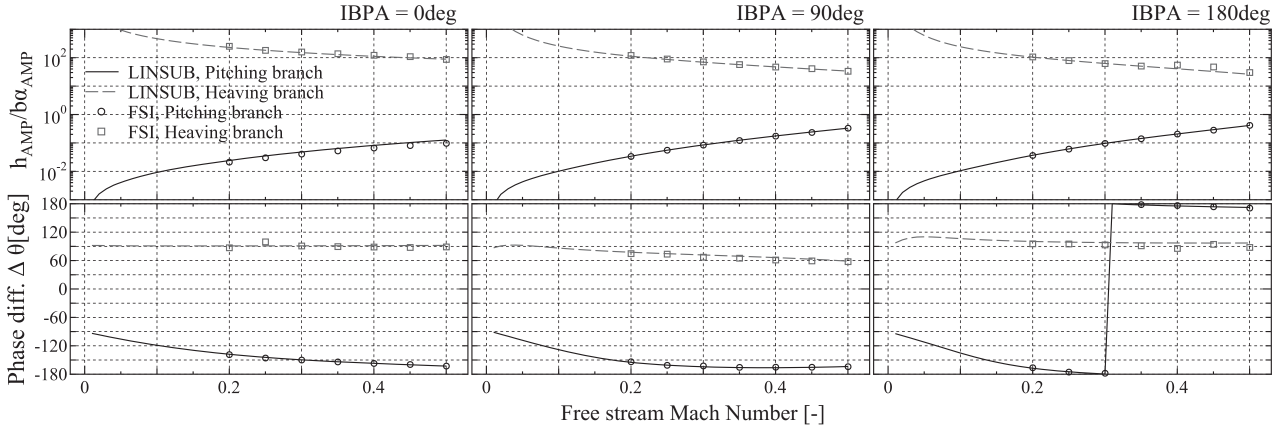
続いて，同定結果の空力弾性モード形状に対しても参照解との比較を行う。ここで，本対象における空力弾性モード形状は次式で表現される。

$$\begin{bmatrix} h \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{\mathrm{AMP}} e^{i\Delta\theta} \\ \alpha_{\mathrm{AMP}} \end{bmatrix} \tag{24}$$

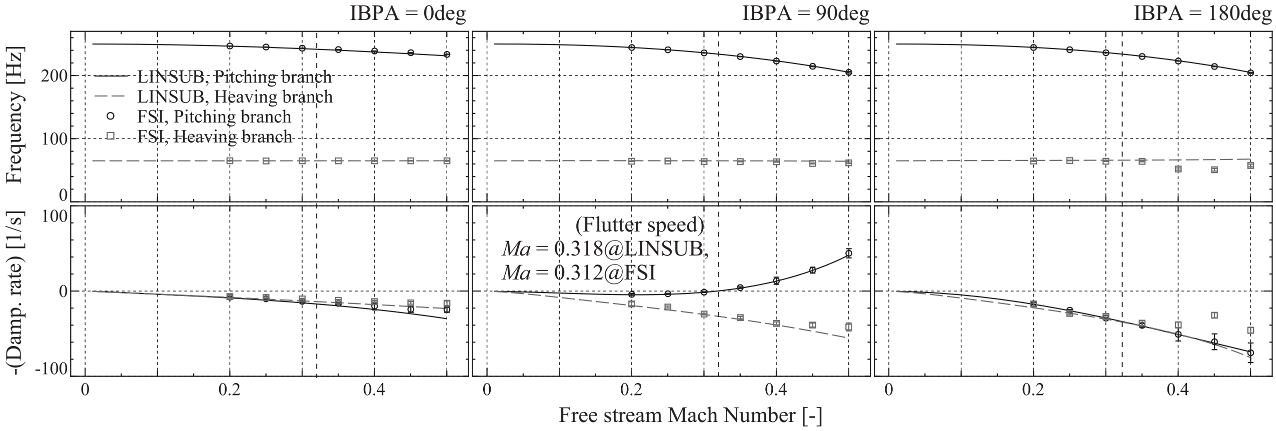
Eq. ㉔ 中でモード形状を決定するパラメタは，並進・ねじり自由度振幅比 $h_{\mathrm{AMP}}/b\alpha_{\mathrm{AMP}}$ と，ねじり自由度に対する並進自由度の位相差 $\Delta\theta$である。

図11⒝にMaを変化させた際のこれら２つのパラメタの変化を，参照解と同定結果を比較して示す。グラフより，並進・ねじり自由度振幅比と並進・ねじり間の位相差は共に参照解とよく一致している。特に，フラッターに突入するIBPA = 90［deg］のPitching branchの空力弾性モード形状を見ると，一様流速度の増加に伴い単調に並進・ねじり自由度振幅比が増加している。また，フラッター速度付近のMa = 0.3 ～ 0.35では，ねじり振動の最大振幅に対しておよそ10%の並進振幅が誘起されており，フラッター時のモード形状はもはや構造振動モードのそれではなくなっている。

図11⒜において，フラッター境界以降のMa = 0.4以上ではHeaving branchの減衰率に参照解との若干のずれが認められる。このずれの原因として，同定に用いたサンプル数の不足，または同定に用いた信号の質の２点が原因として考えられる。図12に，フラッター境界以降のHeaving branch, IBPA = 180［deg］について，サンプル数に対する減衰率の同定結果の変化を，代表としてMa = 0.3, 0.40, 0.45 について示す。どのケースもサンプル数を増やすと一定の結果に近づき，360サンプルで十分収束した結果が得られている。従ってこのずれは，サンプル数の不足ではなくフラッター境界以降で生じる翼振動履歴に原因があると考えられる。フラッター境界よりさらに流速を増した場合，図９⒝で示したように不安定モードが非常に急速に増幅されるために，Heaving branchの振動に関する情報がPitching branchに比べて相対的に小さくなっていることが原因である可能性がある。



(a)Aeroelastic frequency and damping rate



(b)Aeroelastic modeshape（amplitude ratio and phase difference between heaving and pitching degrees of freedoms）

Fig. 11 Comparisons of identified aeroelastic eigenvalues and eigenvectors from the free responses obtained by FSI simulations to the reference solutions obtained by LINSUB and *p* - *k* method

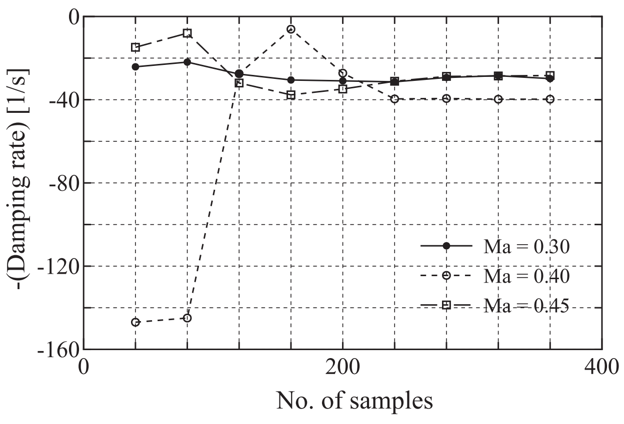


Fig. 12 Convergence history of identified aeroelastic damping rates around and after the flutter boundary（Heaving branch, IBPA = 180［deg］）

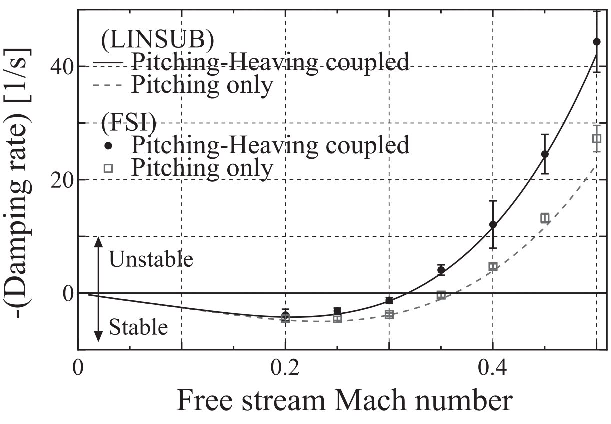


Fig. 13 Comparison of aeroelastic damping rate between pitching- heaving 2DoF model and pitching-only 1DoF model（flutter mode, IBPA = 90deg）

4.8　自由度間の連成の感度について

振動モード形状の変化がトータルの空力減衰へ与える影響として，減衰率の推移をねじり１自由度の場合と比較して図13に示す。参照解ではねじり１自由度の場合はねじり・並進連成の場合よりもフラッター速度が12%程度高く，この感度が同定結果でも正しく捉えられている。このように振動モード形状に気流の影響が現れる場合にも，提案手法によって得られた結果はその効果が適切に反映されている。

5．結言

本研究では，自励空気力と構造振動間の空力的な連成に起因して翼振動の自由振動数や振動モード形状が変化する現象に着目し，気流と翼振動の相互作用を的確に模

擬するための数値解析手法である流体構造連成解析によって得られた翼振動履歴から空力弾性モードを同定する手法を開発した。本手法の特色は，翼列フラッター解析で標準的に用いられてきた，エネルギー保存の考え方に基づいた空力仕事の評価ではなく，システム同定の考え方に基づき，空力弾性方程式を直接モデル化することにある。また，代数的空気力モデルの構築のために複数回のCFDを実施する必要はなく，たった1回の連成解析結果によって解を得ることができる。

亜音速流れ中の平板翼列に生じるねじり・並進フラッターについて翼1枚あたり2自由度のメカニカルモデルを設定し，LINSUBによる空気力モデルを用いた空力弾性解析結果を信頼できる参照解と位置づけ，開発した手法を評価した。提案手法により同定された空力弾性モードは，フラッターが生じない範囲またはフラッターが生じるが増幅率があまり大きくない範囲では，振動数，減衰率，モード形状，フラッター速度のいずれも正しい結果が得られることを示した。加えて，本解析手法によって自由度間の連成に起因する空力弾性モードの不安定化が的確に捉えられた。このことから，通常翼列フラッターで想定される単一構造振動モードの場合のみならず，構造振動モード間の連成がフラッター特性に影響する場合においても，提案手法が有効であることが明らかとなった。

本研究で提案する手法は，ファン・圧縮機・タービンに対する単一振動モードの解析だけでなく，高速プロペラやオープンロータといった，先進的な推進器におけるフラッター解析にも適用できると考えられる。

謝辞

本研究はJSPS科研費14J10312の助成を受けた。ここに記して謝意を表する。

参考文献

(1) Rolls-Royce（著），日本航空技術協会（翻訳），“ザ・ジェット・エンジン”，(2011)，日本航空技術協会，pp. 101-105
(2) Stapelfeldt, S. C., Parry, A. B., and Vahdati, M., “Investigation of Flutter Mechanisms of a Contra-Rotating Open Rotor”, Journal of Turbomachinery, Vol. 138, No. 5 , (2016), 051009
(3) Mehmed, O. and Kaza, K. R. V., “Experimental Classical Flutter Results of a Composite Advanced Turboprop Model”, (1987), NASA Technical Memorandum 88792
(4) 花村庸治, 田中英穂, “翼列における2 自由度連成フラッタ 第2報, フラッタ速度と翼列条件との関係”, 日本機械学會論文集Vol. 33, No. 247, (1967), pp. 377-389
(5) Kaza, K. R. V., Mehmed, O., Narayanan, G. V., and Murthy, D. V., “Analytical Flutter Investigation of a Composite Propfan Model”, NASA Technical Memorandum 88944, (1988)
(6) Ducharme, E. H., “Velocity Scaled Aeroelastic Testing of an Unducted Fan”, Massachusetts Institute of Technology Ph. D thesis, (1987)
(7) Clark, S. T., Kielb, R. E., and Hall, K. C., “The Effect of Mass Ratio, Frequency Separation, and Solidity on Multi-mode Fan Flutter”, Proceedings of the 12th international symposium on unsteady aerodynamics, aeroacoustics and aeroelasticity of turbomachines ISUUAAAT12, (2009), I12-S3-2
(8) Mayorca, M. A., Vogt, D. M., Mårtensson, H., and Fransson, T. H., “Prediction of Turbomachinery Aeroelastic Behavior from a Set of Representative Modes” Journal of Turbomachinery Vol. 135, No. 1, (2012), 011032
(9) 塩入淳平, “ガスタービン翼の振動の研究（第3報）―軸流機翼列翼のフラッタの一般理論―”，機械試験所所報 第9巻 第6報，(1955)，pp.230-233
(10) 塩入淳平, “ガスタービン翼の振動の研究（第5報）――一般理論に対する補遺―” 機械試験所所報 第10 巻 第1報，(1956)，pp.4-6
(11) Cole, H. A. Jr., “On-Line Failure Detection and Damping Measurement of Aerospace Structures by Random Decrement Signatures”, NASA CR-2205, (1973)
(12) 東京大学教養学部統計学教室（編），“基礎統計学III 自然科学の統計学”, (1992), pp.49-51, 東京大学出版会
(13) Shima, E., and Jonouchi, T., “Role of computational fluid dynamics in aeronautical engineering No. 12: Formulation and verification of uni-particle upwind schemes for the Euler equations,” NAL-SP-27, (1994), pp. 255-260
(14) 嶋英志, “圧縮性CFD による低マッハ数流れ計算のための新しい陰的時間積分法”, 第25 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, (2009), C02-4
(15) Hounjet, M. and Meijer, J., “Evaluation of elasto-mechanical and aerodynamic data transfer methods for nonplanar configurations in computational aeroelastic analysis”, NLR-TP-95690 U, National Aerospace Laboratory NLR, (1995)
(16) Sadeghi, M., Liu, F., Lai, K. L., and Tsai, H. M., “Application of Three-Dimensional Interfaces for Data Transfer in Aeroelastic Computations” , AIAA Paper 2004-5376, (2004)
(17) Lancaster, P. and Salkauskas, K., “Surfaces Generated by Moving Least Squares Methods”, Mathematics of Computation, Vol. 37, No. 155, (1981), pp.141-158
(18) Whitehead, D. S., “AGARD Manual on Aeroelasticity in Axial-Flow Turbomachines Vol. 1: Unsteady Turbomachinery Aerodynamics, Chapter III: Classical Two-Dimensional Methods” AGARDograph No. 298, Vol. 1, (1988)
(19) Giles, M. B., “Nonreflecting Boundary Conditions for Euler Equation Calculations”, AIAA Journal Vol. 28, No. 12, (1990), pp. 2050-2058