

# 感度解析を援用した超音速タービン段の高効率化に関する研究

## A Study on Development of Supersonic Turbine Stages with High Efficiency Aided by Sensitivity Analysis

船嶋 健一<sup>\*1</sup>  
FUNAZAKI Ken-ichi

小田島 達哉<sup>\*2</sup>  
ODASHIMA Tatsuya

川崎 聰<sup>\*3</sup>  
KAWASAKI Satoshi

### ABSTRACT

This study deals with an attempt to develop a new methodology for improving aerodynamic efficiency of supersonic turbine stages for rocket turbo-pump system. A key technology employed in this study is a sensitivity analysis based on ANOVA (Analysis of Variation) decomposition and Sobol' indices, which is applied to an analysis of the database formerly obtained by Namba et al. <sup>(1)</sup> during the optimization process of turbine blade profiles in a rocket turbo-pump. In this case a surrogate model is constructed from the database using Radial Basis Function Network (RBFN) since a huge amount of data are necessary to calculate the Sobol' indices. It is found from the investigation based on the Sobol's indices that two parameters belonging to the 1<sup>st</sup> rotor and 2<sup>nd</sup> stator have dominant impacts on total-to-static turbine efficiency, which are the ones that control camber lines near the trailing edges. Two and three dimensional flow analyses using a commercial flow solver are then executed to elucidate the reason why those two parameters can bring about higher turbine efficiency. Furthermore, structural static analyses are made to confirm that there surely appears a trade-off relationship between the turbine efficiency and structural soundness.

キーワード：ロケット、超音速タービン、感度解析、Sobol' 感度指標、高効率化

**Key words :** Rocket, Supersonic Turbine, Sensitivity Analysis, Sobol' Index, High Efficiency

### 1. はじめに

現代文明を支える重要なインフラとして、気象衛星やGPS衛星など様々な人工衛星が挙げられる。これらの人工衛星を宇宙空間へ投入する唯一の輸送手段がロケットであるが、打ち上げ需要の高まりとともに、より大きなペイロードを高い信頼性と低コストで実現するためのロケット開発競争が展開されている。

我が国の基幹ロケットシステムとして、H-2Aの後継であるH3の開発が進められている。H3では、経済性及び信頼性の観点からロケットエンジンサイクルにエキスパンダーブリードサイクルが採用されている。このサイクルでは、ターボポンプから供給される液体燃料（水素）の一部を燃焼室やノズルスカート部の冷却用として分配し、そこで熱交換によりガス化することでタービン駆動ガスを生成し、その後そのまま駆動ガスを外部に排出する。このサイクルは2段燃焼サイクルのような副

燃焼室を必要とせず、そのためシステムの簡素化や低圧化による高い信頼性を有するのが特徴である。その一方で、タービン駆動後のガスを外部に廃棄するため、推進薬の化学的エネルギーを十分に活用することができない。その難点を補うため、タービン段には一層の高効率化が要求されている。著者らのグループでは、Fig. 1に示す様な2段からなるJAXA試作ターボポンプ用タービン（初期タービン）の翼断面形状の最適化をサロゲートモデルベースの遺伝的手法に基づいて実施し、最適化前のタービンと比較して2次元モデルで5.5ポイント、3次元モデルでも3.7ポイントの効率向上を達成した<sup>(1)</sup>。しかし、翼断面形状をMesh Morphing法で機械的に変更しているため、生成した翼断面形状とタービン段効率との関係の整理がなされておらず、得られた知見の高効率超音速タービン設計法への反映が十分ではなかった。

そこで、本研究では、Katoら<sup>(2)</sup>の研究手法を参考に、前回の研究<sup>(1)</sup>で構築したデータベースからサロゲートモデルを構築し直し、分散に基づくグローバル感度解析手法の一つであるSobol' 法を用いて、Sobol' 感度指標 (Sobol' index) により翼断面形状制御パラメータの中で効率改善への寄与度の高いものの抽出を試みた。得られた知見を基に2次元及び3次元流れ解析、さらに構造解析（静的解析）を実施し、ロケット用超音速タービン翼設計の改善に向けての新たな設計手法を検討した。

原稿受付 2021年8月21日

査読完了 2022年1月14日

\* 1 岩手大学理工学部

〒020-8551 盛岡市上田4丁目3-5  
E-mail: funazaki@iwate-u.ac.jp

\* 2 シヤープ(株)

〒590-8522 堺市堺区匠町1番町

\* 3 JAXA 角田宇宙センター

〒981-1525 角田市君萱字小金沢1  
E-mail: kawasaki.satoshi@jaxa.jp

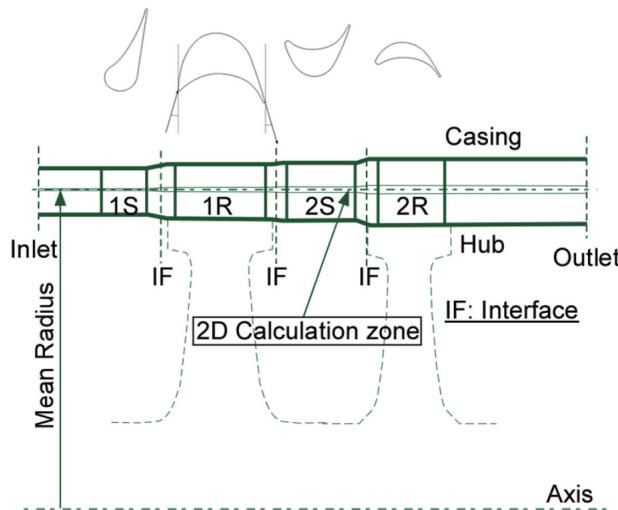


Fig. 1 A meridional view of the target 2-stage turbine with their cross-sectional profiles

## 2. Sobol' の感度指標<sup>(3),(4)</sup>

Sobol' 法は、分散に基づくグローバル（大域）感度解析の一つである。この方法により、ある数理モデル  $f$ （ここではサロゲートモデル）の入力（複数個）、出力（1 個）をそれぞれ確率変数と考えたとき、出力の分散に対する各入力変数の分散の影響度（Sobol' の感度指標）を知ることが可能となる。ただし、相当数の変数空間でのモンテカルロ法に基づく多重積分を行うため、計算負荷が高いという難点はあるが、近年のコンピュータの性能向上やライブラリの整備により実用的になってきている。

Sobol' 法では  $k$  次元の入力変数を有するモデル関数  $f$  を次のように展開する。

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_k) \\ = f_0 + \sum_{i=1}^k f_i(x_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq k} f_{i,j}(x_i, x_j) + \dots + f_{1,2,\dots,k}(x_1, \dots, x_k) \quad (1)$$

ここで入力変数は単位超立方体空間で定義されているものとする。 $f_0$  は  $f$  の平均値である。式(1)の分解項は直交性を有し、その結果それぞれの項は多重積分によって求められる。例えば、

$$f_i(x_i) = \int_0^1 \dots \int_0^1 f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}_{-i} - f_0 \quad (2)$$

ここで、上記の多重積分は  $x_i$  を除く全ての入力変数に関する積分である。これらの表現を踏まえて、モデル関数の総分散と式(1)の各項の偏分散を考える。

$$D = \int_{\Omega^k} f^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - f_0^2 \quad (3)$$

$$D_{i_1, \dots, i_s} = \int_0^1 \dots \int_0^1 f^2(x_1, \dots, x_{i_s}) dx_1 \dots dx_{i_s} \quad (4)$$

式(3)に式(1)を代入し、直交性を用いると、総分散を次元の増加に従った偏分散の和に分解できる。これを元に、総分散に対する各入力変数の寄与を表す感度指数が次の

ように定義される。

$$D = \sum_{i=1}^k D_i + \sum_{1 \leq i < j \leq k} D_{i,j} + \dots + D_{1,2,\dots,k} \quad (5)$$

$$S_{i_1, \dots, i_s} = \frac{D_{i_1, \dots, i_s}}{D}, \quad i \leq i_1 < \dots < i_s \leq k \quad (6)$$

ここで、 $S_i$  は入力変数  $x_i$  に対する 1 次オーダーの感度指標であり、主効果とも呼ばれる。 $S_{i,j}$  ( $i \neq j$ ) は 2 次オーダーの感度で、2 つの要因の交互効果を表す。感度指標の総和は以下のように 1 になる。

$$\sum_{i=1}^k S_i + \sum_{1 \leq i < j \leq k} S_{i,j} + \dots + S_{1,2,\dots,k} = 1 \quad (7)$$

## 3. サロゲートモデルによる感度解析

### 3.1 サロゲートモデルの構築

難波ら<sup>(1)</sup>は、JAXA により試作された 2 段の超音速タービン（初期タービン）を対象として翼断面形状の最適化を行っている。その際、Fig. 2 のような複数のパラメータで制御される格子上で翼断面形状を表現している。

$\alpha, \beta$  : 翼前縁、翼後縁での反り制御パラメータ

$L_{T1}, L_{T2}$  : 翼厚み制御パラメータ

$L_{LE}, L_{TE}$  : 翼前縁、翼後縁くさび角制御パラメータ

$\gamma$  : スタガーアルファ制御パラメータ

なお、 $L_{LE}, L_{TE}$  は  $L_{T1}, L_{T2}$  と後者の中点で連結されている。これらのパラメータをランダムに動かすことで得られる 2 次元翼列群に対して汎用コード ANSYS CFX での RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes) 解析を実施して Total-to-Static 効率  $\eta_{TS}$  を算出している。ここで、

$$\eta_{TS} = \frac{1 - T_{0,out}/T_{0,in}}{1 - (p_{out}/p_{in})^{\kappa-1}} \quad (6)$$

$p_{0,in}, T_{0,in}, p_{out}, T_{0,out}$  は、それぞれタービン段入口でのよどみ点圧力、温度、及びタービン段出口での静圧、よどみ点温度である。 $\kappa$  は比熱比である。

計算対象となった翼列群の内、タービン段通過流量及びタービン出力が所定の範囲（流量変動、出力は初期タービンの流量、出力のそれぞれ  $\pm 1\%$  以内、99% 以上）に収まる全 531 パターンとそれぞれに付随する 19 個の制御パラメータ（1 段動翼 1R 7 個、2 段静翼 2S 7 個、2 段動翼 2R 5 個）のデータベースを得ている。なお、2 段動翼については、その形状的特徴（後縁部付近の厚み）から制御パラメータを減じている。このデータベースから、線形人工ニューラルネットワークの一種である放射基底関数ネットワーク（Radial Basis Function Network; RBFN）によってサロゲートモデルを構築した。

サロゲートモデルの予測性能評価には、1 個抜き交差検証（Leave-one-out cross validation; LOOCV）<sup>(2),(5)</sup> を用いた。Fig. 3 には評価結果を示す。低効率側での差異が目立つものの、相関係数  $R=0.8960$ （決定係数  $R^2=0.8028$ ）となり、比較的良好な予測精度を有していると判断できる。

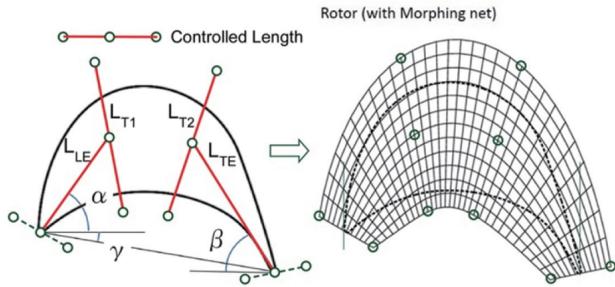


Fig. 2 Blade profile drawn on a deformable mesh by use of control parameters

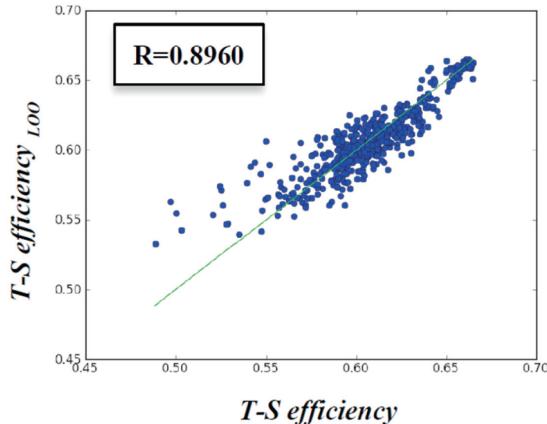


Fig. 3 Performance check of the surrogate model by use of LOOCV method

### 3.2 感度分析

**3.2.1 モンテカルロ積分<sup>(6)</sup>** 式(2)や式(3)の多重積分の評価には次元サイズの点からモンテカルロ積分での評価が一般的である。モンテカルロ積分は、確率密度関数  $p(x)$  の導入により通常の積分を確率変数として扱い、積分値をその確率変数の期待値として算出するものである<sup>(7)</sup>。試行の回数を増やすことで、大数の法則により期待値は積分値に漸近する。実際には、モンテカルロ積分であっても計算時間が長くなることから、計算の高速化が必要となる。具体的な方法としては、分散減少法と準モンテカルロ法 (Quasi-Monte Carlo Method; QMC Method)<sup>(8)</sup>などがあるが、本研究では前者の一つであるラテン超方格サンプリング (Latin Hypercube Sampling; LHS)<sup>(9)</sup>とQMC法を併用している。

モンテカルロ積分をSobol'の感度指数（式(4)）の評価に適用する場合、展開された関数（式(2)）推定や総分散（式(3)）推定の際の積分変数空間全体におけるサンプル数  $n_{\text{samp}}$  の選定が重要である。Katoら<sup>(2)</sup>の研究では  $n_{\text{samp}} = 1,000 \sim 10,000$  が推奨値として紹介されている。本研究では計算負荷を考慮し、 $n_{\text{samp}} = 1,000$ とした。なお、後述するように、QMC法でも評価しており、両者に大きな違いが生じないことを確認している。

実際の感度分析には、Pythonのライブラリー SALib<sup>(10)</sup>を用いた。

**3.2.2 感度指標** 前述したサロゲートモデルを用い、19個の制御パラメータ毎にその可動域を与え Sobol' の感度指数を求めた。ここで各パラメータの可動域は、初期タービン翼での値を中央値として、次の様に設定している。

$$\alpha : -2.5^\circ \sim 2.5^\circ \quad \beta : -2.5^\circ \sim 2.5^\circ$$

$$L_{LE}, L_{TE}, L_{T1}, L_{T2} : \pm 10\%$$

$$\gamma : -5.0^\circ \sim 5.0^\circ$$

ただし、2段静翼については、前述の流量及び出力に関する要件を満たす個体数を十分に確保するため  $\beta : -5.0^\circ \sim 2.5^\circ$  としている。

Fig. 4にSobol' の感度指数を示す（制御パラメータの表示方法としては、例えば1段動翼の翼前縁反り制御パラメータは  $1R - \alpha$  としている）。式(6)から感度指数の総和は1となることから、円グラフで全ての感度指数を表示している。なお、本研究では1次オーダ（主効果）は全てを計算し、2次オーダ以上の効果（Higher order項）の合計は式(6)から算出している。

この結果から、 $2S - \beta$  と  $1R - \beta$  の翼後縁での反り制御パラメータの感度指数が全体のそれぞれ30%程度を占め、続いて Higher order 項が全体の25%程度となっていることがわかる。 $2S - \beta$ ,  $1R - \beta$  以外の主効果の合計は16%程度に留まっているが、特に1段動翼に関するパラメータの効果の割合が大きい。これはタービン出力に対して1段での出力の割合が65%以上占めるパターンが大半であることが関係している<sup>(1)</sup>。

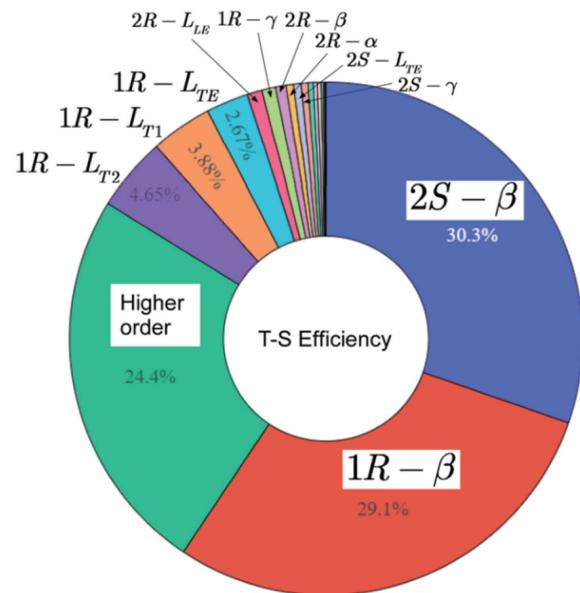


Fig. 4 Pie chart of Sobol' sensitivity indices

Table 1 Comparison of Sobol' first-order sensitivity indices obtained by LHS and QMC

Parameter	LHS	QMC
2S- $\beta$	30.3%	30.4%
1R- $\beta$	29.1%	29.0%
1R-L <sub>T2</sub>	4.65%	4.66%
1R-L <sub>T1</sub>	3.88%	3.68%
1R-L <sub>TE</sub>	2.67%	2.63%

Table 2 Sobol' second-order sensitivity indices

Parameter	Sensitivity indices
1R-L <sub>TE</sub> - 1R- $\gamma$	4.83%
1R-L <sub>T1</sub> - 1R- $\gamma$	2.64%
1R-L <sub>TE</sub> - 1R- $\alpha$	1.25%
1R-L <sub>T2</sub> - 1R- $L_{TE}$	1.10%
1R-L <sub>T2</sub> - 1R- $\gamma$	1.04%
1R-L <sub>T1</sub> - 1R- $L_{TE}$	1.02%

Table 1には、Sobol' の1次オーダ感度指標の算出の際に用いた手法の違いによる評価結果の比較を示す。これより、タービン段の効率に影響を与える主たる要因の抽出に対して、LHS法及びQMC法のいずれでもほぼ大差がないことが確認された。Table 2にはSobol' の2次オーダ感度指標を示す。ここでは、100000サンプルによるQMC法で評価した。この結果から、1段動翼のスタガ角は単独では影響度は小さいが、1R-L<sub>TE</sub>や1R-L<sub>T1</sub>との相互作用により影響度が高まっていることが分かる。

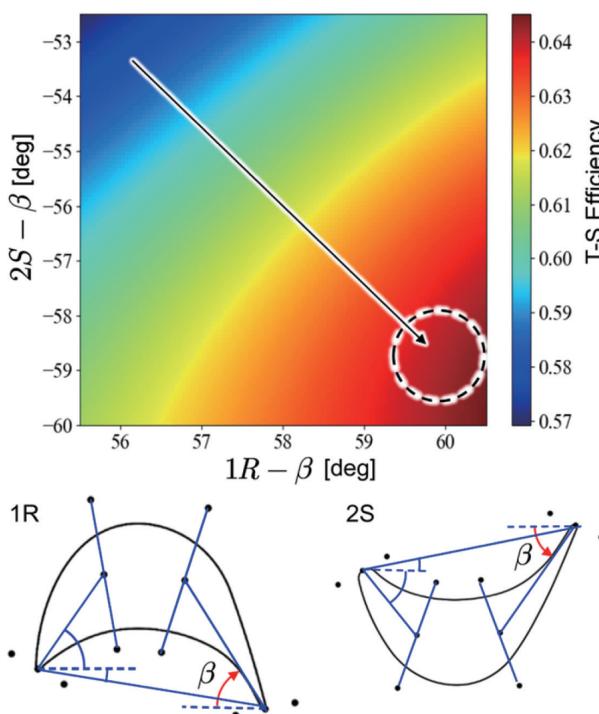


Fig. 5 Impacts of two dominant parameters on the turbine total-to-static efficiency

### 3.3 支配的な主効果の分析

ここまで調査の結果、2S- $\beta$  及び1R- $\beta$  がタービン段効率に大きく関与することが明らかになった。ただし、分散に基づく分析であるため良好な結果をもたらす方向性については明らかではない。そこで、19の制御パラメータのうちこの2つ以外を初期タービン翼の設計値(可動域の中央値)に固定し、上記の2つのパラメータがタービン段効率に与える影響についてサロゲートモデルを用いて調査した。その結果をFig. 5に示す。

この結果から、2S- $\beta$  と1R- $\beta$  の絶対値の増加とともに効率が上昇することが分かった。また、2S- $\beta$  と1R- $\beta$  の絶対値が相対的に小さい範囲では効率上昇は線形的であるが、次第に頭打ちになっている。

### 3.4 パラメータ可動域の影響

前述のように、本研究では2S- $\beta$  の可動範囲を-5.0°～2.5°としているが、可動域の幅の違いがどのように感度指標の評価に影響しているかを検討する。Fig. 5から、タービン段効率は1R- $\beta$  と2S- $\beta$  が線形的に変化することが明らかになったことから、その他のパラメータの影響を無視し、タービン段効率を次のように近似する。

$$\eta_{\text{TS}} = A\beta_{R1} + B\beta_{S2} + C \quad (7)$$

ここで、1R- $\beta$  を  $\beta_{R1}$ 、2S- $\beta$  を  $\beta_{S2}$  としている。付録で求めた関係式から、1R- $\beta$ 、2S- $\beta$  のSobol' 感度指標  $S_1$ 、 $S_2$  は、それぞれのパラメータの可動域幅を  $a$ 、 $b$  とすると、

$$S_1 = \frac{A^2 a^2}{A^2 a^2 + B^2 b^2}, \quad S_2 = \frac{B^2 b^2}{A^2 a^2 + B^2 b^2} \quad (8)$$

となる。Fig. 5から重回帰分析により係数  $A$ 、 $B$  を求め、本研究で用いた  $a=5.0$ 、 $b=7.5$  の場合と、 $a=b=5.0$  の場合を算出した。その結果より、

$$a=5.0, b=7.5 \quad S_1=0.471, S_2=0.529$$

$$a=5.0, b=5.0 \quad S_1=0.667, S_2=0.333$$

を得た。即ち、可動域幅を揃えると1R- $\beta$  の効果が優位となることがわかる。簡素化した式に基づく検討の結果ではあるが、本研究で2S- $\beta$  のSobol' 感度指標が最も大きくなった原因是可動域幅が影響しており、実際には1R- $\beta$  のSobol' 感度指標の方が大きいと推定される。

## 4. 流れの数値解析による効率変化の要因調査

### 4.1 調査手法

以上の感度指標の分析により、2S- $\beta$  及び1R- $\beta$  がタービン段効率に大きな影響度を有することが判明した。これを踏まえて、この2つの制御パラメータ以外のパラメータを初期値に固定しつつ、2S- $\beta$  及び1R- $\beta$  を3水準(1R- $\beta$  : ①54.5 [deg] ②58.0 [deg] ③61.5 [deg]、2S- $\beta$  : ①-51.5 [deg] ②-55.0 [deg] ③-58.5 [deg])で変化させることで、Fig. 6のような2次元翼形状を生成した。②③の場合がほぼ初期タービンの翼形状群である。なお、図中にはそれぞれの翼列基本データを併記している。さらにそれをmidspan断面形状としてスパン方

向に伸展し3次元翼形状を生成した。それぞれに対して2次元及び3次元流れ解析を実施した。流れ解析はほぼ既報<sup>[1]</sup>に準じており詳細は省略するが、以下に概要を紹介する。

流れ解析には、汎用コードANSYS-CFX Ver.15.0を用い、mixing planeを用いたRANS解析を行った。乱流モデルはSST (Shear Stress Transfer) モデルである。格子生成にはNumeca AutoGrid5 Ver.14.1を用いた。Fig. 6には3次元翼まわりに生成された計算格子を示す(計算領域はFig. 1に示す)。非定常解析時の計算負荷軽減を念頭に、翼近傍などでの乱流解析には壁関数を使用している。それを踏まえて、壁に最接近する格子点のy+を50程度になるように調整している。総格子点数は約170万点である。

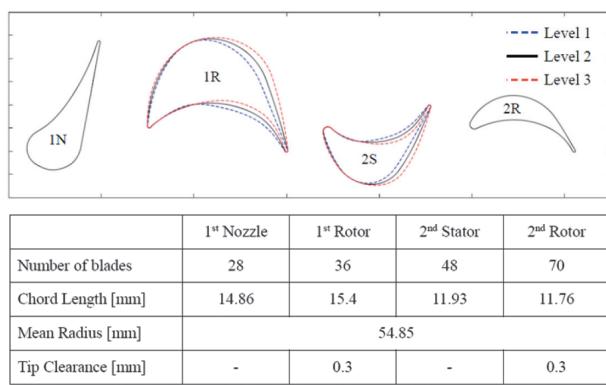


Fig. 6 Cross-sectional profiles of turbine blades and vanes to be calculated (top) and each cascade data (bottom)

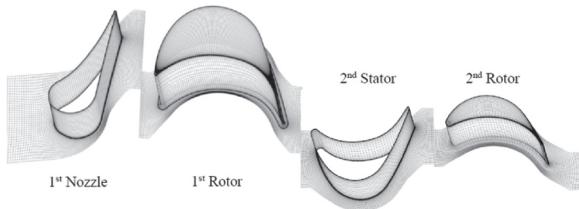


Fig. 7 Computational grids

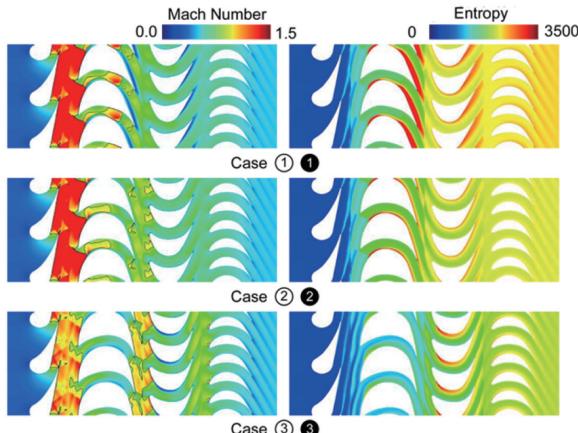


Fig. 8 Results of 2D flow analyses for three cases with different combinations of dominant control parameters (left: absolute Mach number, right: entropy)

## 4.2 2次元流れ解析結果

1R- $\beta$  及び2S- $\beta$ をそれぞれ3通り変化させた合計9ケースの全てについて2次元RANS解析を行い、その中で水準を揃えた3ケースに関する解析結果をFig. 8に示す。Fig. 8左図は絶対マッハ数分布、右図はエントロピー分布である。また、Fig. 9には、軸方向への流量平均エントロピー増加を示す。なお、図中の $\Delta_{sa}$ 、 $\Delta_{sb}$ 、 $\Delta_{sc}$ はmixing planeにおけるエントロピーの不連続増加である<sup>[11]</sup>。

ケース①①では、1段静翼出口マッハ数が大きく、1段動翼前縁部に離脱衝撃波が発生している。さらにその翼間流路内(およそ40%コード長の位置)にスロートが生じ、その下流部で衝撃波が発生し境界層剥離を誘発している。そのため、Fig. 8右図のように1段動翼上流で広範囲にエントロピーの上昇が発生するとともに、翼負圧面で高エントロピー領域が発生している。その結果として、1段動翼流路で流量平均エントロピーが急激に増加し、タービン段出口での流量平均エントロピーは3ケースの中で最も大きくなっている。ケース②②でも引き続き1段動翼前縁での離脱衝撃波に関連したエントロピー生成量は多いが、その後の流量平均エントロピー増加は緩やかである。ケース③③では、スロートは1段動翼の後縁部に位置し、その後2段静翼で弱い衝撃波が発生しているが、それがエントロピー増加に与える効果は弱く、相当量のエントロピーは1段動翼と2段静翼間のmixing planeで発生している。ただし、タービン段出口での流量平均エントロピーは調査した範囲内で最も小さい。

初期タービン(ケース②②に相等)1段目出力は全体出力の75%程度であるが<sup>[11]</sup>、この数値はロケット用タービンで多く用いられてきた速度複式衝動タービンの1段目出力比とほぼ一致している<sup>[12]</sup>。そして、1段静翼出口での高いマッハ数はそれを裏付けている。また、ケース

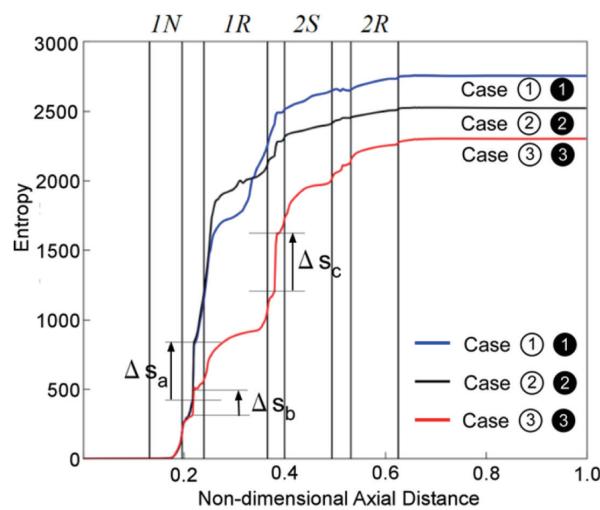


Fig. 9 Mass-averaged entropy increase obtained in 2D flow analyses for three cases with different combinations of dominant control parameters

Table 3 2D loss coefficients for all combinations (deeper shade means larger loss)

	①	②	③
①	0.4304	0.4151	0.3956
②	0.4060	0.3928	0.3838
③	0.4039	0.3875	0.3583

③④で高効率が得られた理由は、それが各段における反動度を上げる方向であると解釈することができる。

Table 3には、調査した9ケース全てのタービン段効率から算出した2次元損失係数 $\zeta$ を示す。

$$\zeta = 1 - \eta_{TS} \quad (9)$$

この表からもケース③④の損失が最も少ないことが分かる。Denton[13]によれば、タービン段での損失はタービン段でのエントロピー上昇に比例することが示されているが、Fig. 9やTable 3の結果からも概ねその傾向が確認できる。

### 4.3 3次元流れ解析結果

前節と同様に、1R- $\beta$ 及び2S- $\beta$ を変化させた合計9ケースの全てについて3次元RANS解析を行った。水準を揃えた3ケースに関するmid-span絶対マッハ数及びエントロピーコンターをFig. 10に示す。Fig. 11には、流量平均エントロピーの軸方向変化を示す。Fig. 10に示す流れ場の全般的な特徴はFig. 8の二次元解析の結果と類似しているが、全体にエントロピーの生成量が増加し、マッハ数が低下していることが挙げられる。Fig. 11に示す流量平均エントロピーをFig. 9と比較してみると、1段動翼内での連続的なエントロピー上昇、タービン段全体のエントロピー生成量の増加（ケース①①で1.17倍、ケース②②で1.18倍、ケース③③で1.22倍）が確認される他、ケース①①、②②の場合ではタービン段全体でのエントロピー上昇に占める2段目の割合が3次元の場合で増加している（2次元の場合は約10%、3次元の場合

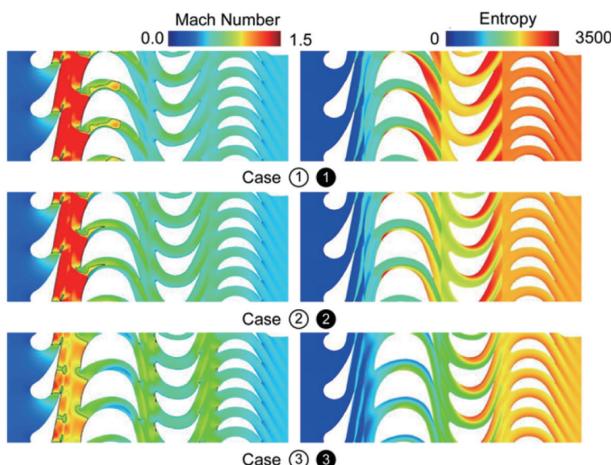


Fig. 10 Mid-span contours obtained by 3D flow analyses for three cases with different combinations of dominant control parameters (left: absolute Mach number, right: entropy)

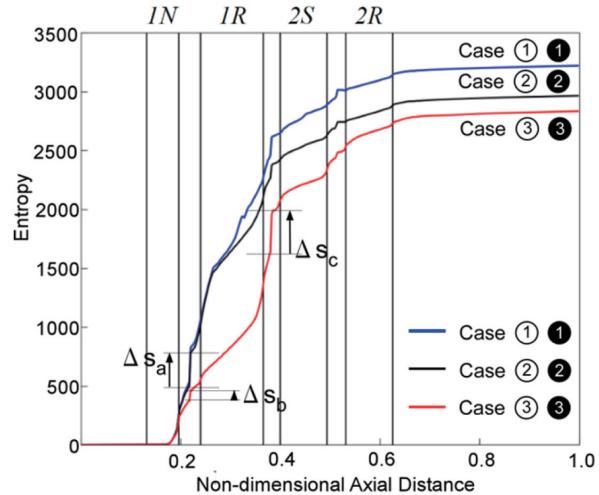


Fig. 11 Mass-averaged entropy increase obtained in 3D flow analyses for three cases with different combinations of dominant control parameters

は約20%)。なお、ケース③③の場合は、2次元、3次元ともに2段目での割合は30%程度である。

1段動翼及び2段静翼まわりの3次元的な損失発生状況を明らかにするため、それぞれの翼間流路における軸方向に垂直な面内での散逸関数 $\phi^{(1)}$ コンターをFig. 12に示す。この図では、流路渦や翼先端漏れ渦など2次流れによるエントロピー生成への寄与が大きいことが示されている。また、1R- $\beta$ 及び2S- $\beta$ の絶対値を増加することで1段動翼でのエントロピー生成が減少する一方、2段静翼での2次流れの寄与度が上がっていることが分かる。

Table 4にタービン段での3次元損失係数を示す。2次元の場合の損失係数は、サロゲートモデルの場合と同様に1R- $\beta$ 及び2S- $\beta$ に対して線形的な挙動を示していたが、3次元の場合の損失係数はS- $\beta$ に対しては線形的に振る舞うが、1R- $\beta$ に対しては水準③を除きそのような傾向にはなっていない。ただし、最小の損失係数はケース③③であり、これは2次元の場合と同じである。

Table 5には3次元損失係数と2次元損失係数との比を示す。ここで、Table 5中の損失係数比と前出の流量平均エントロピー比がほぼ符合している点に留意願いたい。この結果から、水準③での比が他の2水準の場合よりも大きく、損失に与える3次元性の効果が1段、2段ともに強まったと考えることができる。このことは、2次元流として得たデータでも高効率化をもたらす制御パラメータ探索はある程度可能であるものの、3次元性の効果把握の重要性を改めて示している。

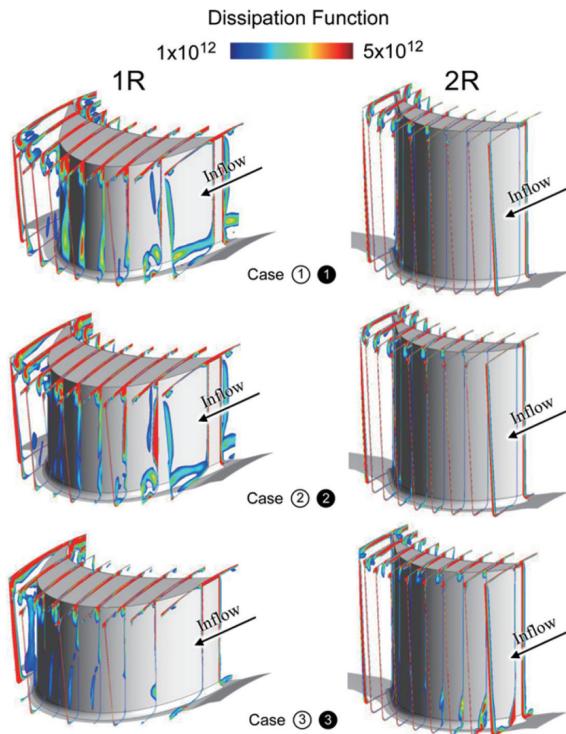


Fig. 12 Dissipation function contours for 1R (left) and 2R (right)

Table 4 3D loss coefficients for all combinations (deeper shade means larger loss)

	①	②	③
①	0.5053	0.4862	0.4611
②	0.4751	0.4617	0.4416
③	0.4861	0.4664	0.4384

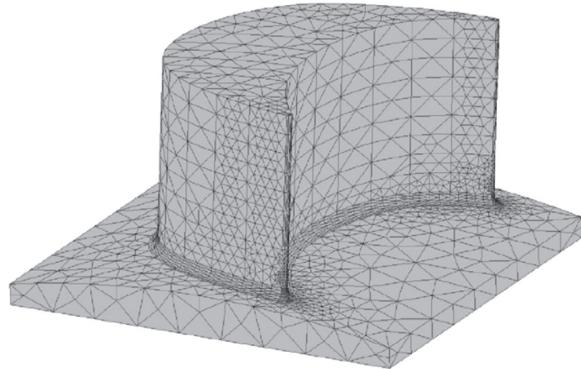
Table 5 Ratios of 3D to 2D loss coefficients for all combinations

	①	②	③
①	1.174	1.171	1.166
②	1.17	1.175	1.151
③	1.204	1.204	1.224

## 5. 構造解析（静的解析）

ロケット用ターボポンプには高い流体力学的効率に加えて構造的健全性が特に重視され、その駆動用タービンも例外ではない。ターボ機械の設計には流体力学的効率と構造的健全性の間にはトレードオフ関係の認識が必要であるが<sup>[15]</sup>、ロケット用タービンでは雰囲気温度、回転数、翼枚数等の関係で高サイクル疲労寿命評価が重要である<sup>[16]</sup>。この課題に取り組むためには大規模な非定常流解析、共振応答解析などの実施が必要であり<sup>[17]</sup>、本研究の範囲を超えているが、高効率なタービンの構造的特徴を把握するため、前出の3種類のタービン翼についての有限要素モデルを基に、遠心力及び定常流体力が静的に作用する状態でのvon Mises応力を求め比較した。

Fig. 13にはケース②②翼の有限要素(Finite Element;FE)モデルと対象とした2種類の翼材料特性を示す。計算モデルには流れ解析で使用したFillet R付の1段動翼CADデータを用い、Bliskを想定してディスク円周部の一部を含めたモデルを作成した。それをPointwise V18.2R1で読み込み1次要素からなる有限要素モデルを作成し、さらにMSC Nastranで2次要素モデルに変換した。要素数は約14,000、ノード数は約23,000である。



Material	Young's Modulus [GPa]	Poisson's Ratio	Density [ton/mm <sup>3</sup> ]
Inconel 718	193	0.28	$8.19 \times 10^{-9}$
Ti-6Al-4V	117	0.31	$4.43 \times 10^{-9}$

Fig. 13 Finite Element model of 1R (Case ②②)

応力解析（線形静解析）にはMSC Nastranを用いた。そこでは、FEモデルの底面、周方向側面を完全拘束した状態で、回転数60,600rpmでの遠心力及び3次元定常流解析で得た流体力をモデルに課した。なお、翼表面の圧力をFEモデルの翼表面ノードに荷重としてマッピングする際に、徳山<sup>[18]</sup>が開発した手法を用いた。

Fig. 14に3ケースの応力解析に用いた翼面圧力分布を示す。既にFig. 10で見たように、ケース①①では翼前縁での離脱衝撃波に続き再加速後衝撃波が再度発生しているが、1R-βを増加させることで全体のマッハ数が低下するとともに翼後縁方向に流れが加速し、翼正負圧面間の圧力差が後縁近傍で増大している。Fig. 15に3ケースについてのvon Mises応力分布を示す。ここでの解析は、翼形状変化による流体力の効果の違いを明らかにするため、遠心力を課さずに実施された。この図から、1R-βを増加させることで1段動翼後縁近傍での正負圧面間の圧力差が増加し、結果として高von Mises応力領域が翼後縁近くでスパン方向帶状に発生する様子が確認できる。また、翼後縁根元部にも高von Mises応力領域が出現している。

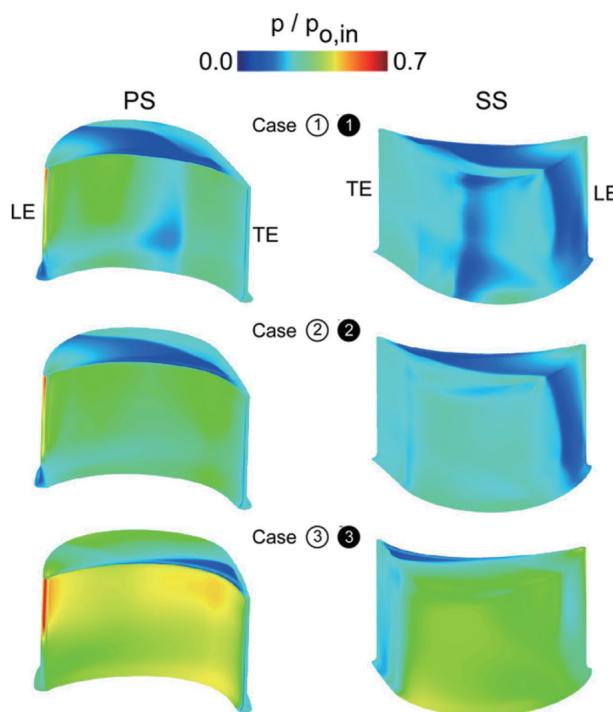


Fig. 14 Static pressure contours over 1R entire surface for the three cases

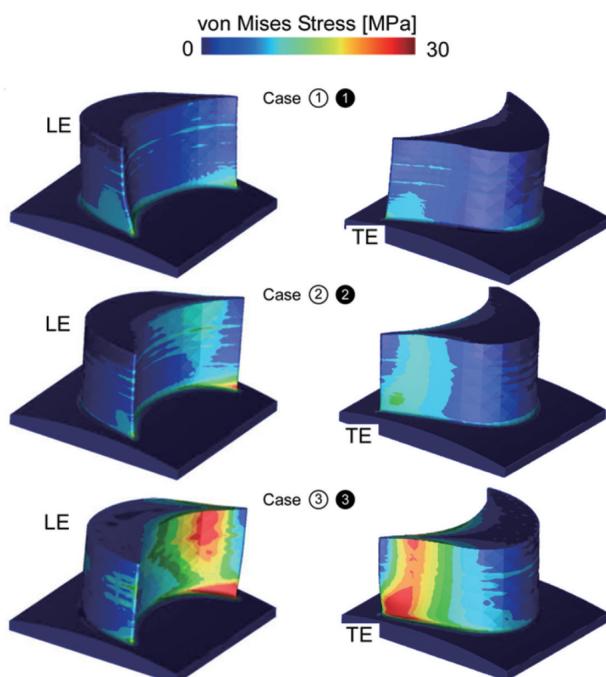


Fig. 15 Contours of von Mises stress over 1R entire surface for the three cases (Inconel 718)

Fig. 16には遠心力を考慮した場合の最大von Mises応力値の比較を示す。遠心力による効果が大きく、翼形状の違いによる最大von Mises応力値の変化の傾向はこの図からは読み取れないが、Inconel 718の場合は、その降伏応力（約1,000 [Mpa]）の約60%の最大値が発生している。今回は線形静解析のみを行ったが、動静翼空力干渉等による非定常流体力が作用する場合、定常流の場

合と同様に翼形状の違いが非定常流体力、そして振動応力にも影響すると考えられる。

今後は、高サイクル疲労発生リスク低減など、構造的健全性を考慮した高効率タービン翼設計手法開発に取り組む予定である。

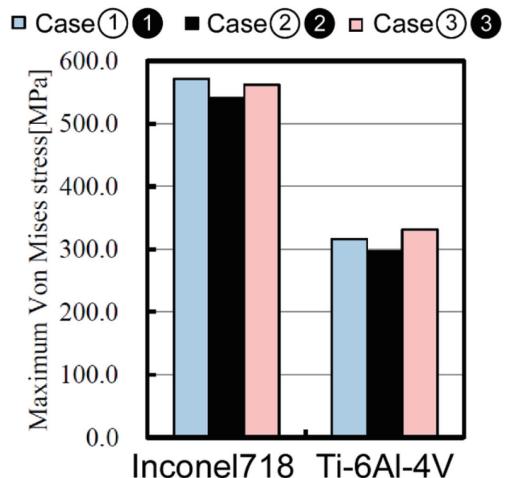


Fig. 16 Maximum von Mises stresses identified in 1R FE model for Inconel 718 and Ti-6Al-4V

## 6. 結 論

本研究で得られた知見等は以下のように整理できる。

### (1) Sobol' 感度指標による調査結果

本研究では、前回の研究<sup>(1)</sup>で構築したデータベースからサロゲートモデルを構築し、Sobol' 感度指標により19個の翼断面形状制御パラメータの中で効率改善への影響度の高いパラメータの抽出を行った。その結果として、1段動翼及び2段静翼の反り角制御パラメータ1R- $\beta$ 及び2S- $\beta$ の2つが、高効率化に向けて60%程度の影響度を有する支配的パラメータであることが明らかになった。

### (2) 2次元及び3次元RANS解析

得られた結果を基に、1R- $\beta$ 及び2S- $\beta$ に対してそれぞれ3水準を設定し、残りの制御パラメータを固定して9個の翼断面形状を生成し、それに対して2次元及び3次元RANS解析を行った。

① 2次元RANS解析の結果から、1段動翼前縁での離脱衝撃波を制御しつつ、2段への流入マッハ数を上げることで高効率化が達成できていることが確認された。このことは難波ら<sup>(1)</sup>の知見とも一致している。

② 3次元RANS解析からは、2次元の場合と同様に高効率化に向けて1R- $\beta$ 及び2S- $\beta$ が重要なパラメータであることが確認された。ただし、2次元の場合と異なり、3次元では1R- $\beta$ 及び2S- $\beta$ の絶対値に対し単調にはタービン段効率が増加せず、特に1R- $\beta$ の効果に関して差異が生じていることが明らかになった。

### (3) 構造解析（線形静解析）

特徴的な3ケースでの1段動翼に対する構造解析を実施し、空力効率と構造的健全性とのトレードオフが発生

しうることをvon Mises応力値で改めて確認した。

これ以降の更なる議論の深化には非定常流解析とそれを基にした翼振動応答解析や疲労寿命予測などが必要であり、同時にそれらの知見を設計法へ組込む作業が今後の課題である。

## 参考文献

- (1) 難波海, 船崎健一, 川崎聰, 矢田和之, ロケットエンジン (A.2) ターボポンプ用タービン段の翼形状最適化に関する研究, ターボ機械, Vol. 48, No. 1 (2019), pp. 53-60.
- (2) Kato, H., Ito K., and Lepot I., Sensitivity Analysis Based on High Fidelity Simulation: Application to Hypersonic Variable-Cycle Engine Intake Design, International Journal of Engineering Systems Modelling and Simulation, Vol. 2, Nos. 1/2 (2010), pp. 38-45.
- (3) Owen, A., Monte Carlo Theory, Methods and Examples, <https://statweb.stanford.edu/~owen/mc/> (2021/07/05閲覧).
- (4) 本間俊充, Global感度解析—Sobol' 法, オペレーションズ・リサーチ, Vol. 55 (10) (2010), pp. 727-631.
- (5) Raschka, S., Mirjalili, V., Python機械学習プログラミング (第3版, 福島真太朗監訳), インプレス (2020).
- (6) 横谷進弥, CDOプライシングの離散高速アプローチ (2) :ツリーを用いた準解析的プライシングのマルチ・ファクター・モデルの応用, 金融研究, 11 (2007), pp. 45-78..
- (7) <https://rayspace.xyz/CG/contents/montecarlo/> (2021/07/26).
- (8) 鈴木航介, 合田隆, 準モンテカルロ法の最前線, 日本応用数理学会論文誌, Vol. 30, No. 4 (2020), pp. 320-374..
- (9) McKay, M.D., Conover W.J., and Beckman R.J., "A comparison of three methods for selecting input variables in the analysis of output from a computer code," Technometrics, Vol. 21, No. 2 (1979), pp. 239-245..
- (10) Herman, J. and Usher, W. SALib: An open-source Python library for sensitivity analysis. Journal of Open Source Software, 2 (9), (2017) doi:10.21105/joss.00097.
- (11) Denton, J.D., Some Limitations of Turbomachinery CFD, ASME TURBO EXPO, GT2010-22540 (2010).
- (12) Mohr, D., Turbomachines in Rocket Propulsion Systems, Handbook of Turbomachinery (2nd edition, Logan, E., Jr., Roy, R.), CRC Press (2003).
- (13) Denton, J.D., Loss Mechanisms in Turbomachines, ASME Journal of Turbomachinery, Vol. 115, No. 4 (1993), pp. 621-656.
- (14) Lakshminarayana, B., Fluid Dynamics and Heat Transfer of Turbomachinery, Wiley (1995), p.17.
- (15) Martensson, H. and Groth, P., Methods for Aeroelasticity in Propulsion, Unsteady Aerodynamics and Aeroelasticity of Turbomachines (Transson, T.H. ed.) (1997), pp. 565-582.
- (16) 川崎聰, 船崎健一, ロケット用ターボポンプのタービン技術と今後の展望, ターボ機械, Vol. 45, No. 5 (2017), pp. 285-292
- (17) Funazaki, K., Iwaguchi, N. and Kawasaki, S., Unsteady Flow Simulations in Two-Stage Turbines of a Rocket TurboPump to Estimate Blade Structural Soundness for Fatigue, accepted for publication in IOP Journal of Physics: Conference Series.
- (18) 徳山雄己, 流体-構造連成効果を考慮したロケットエンジン用高効率高信頼性タービン開発に関する研究, 岩手大学工学研究科, 博士学位論文 (2016)

## 付録 (線形関数のSobol' 感度指数)

式(1)のモデル関数を線形化した次の関数を考える。

$$f(x, y) = Ax + By + C = Aa\frac{x}{a} + Bb\frac{y}{b} + C \quad (A.1)$$

$$= X\tilde{x} + Y\tilde{y} + C, \quad X = Aa, \quad Y = Bb$$

この関数に対して、領域  $\Omega^2$  ( $0 \leq \tilde{x} \leq 1, 0 \leq \tilde{y} \leq 1$ ) で Sobol' 感度指数を求める。 $f_0$ は  $f$  の平均値であり,

$$f_0 = \iint_{\Omega^2} f(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y} = \frac{X}{2} + \frac{Y}{2} + C \quad (A.2)$$

となる。式(2)から、次の関係式を得る。

$$f_1(\tilde{x}) = \int_0^1 (X\tilde{x} + Y\tilde{y} + C) d\tilde{y} - f_0 = X(\tilde{x} - \frac{1}{2}) \quad (A.3)$$

$$f_2(\tilde{y}) = \int_0^1 (X\tilde{x} + Y\tilde{y} + C) d\tilde{x} - f_0 = Y(\tilde{y} - \frac{1}{2})$$

を得る。総分散D及び偏分散Di (i=1,2) は

$$D = \iint_{\Omega^2} (X\tilde{x} + Y\tilde{y} + C)^2 d\tilde{x} d\tilde{y} - f_0^2 = \frac{X^2 + Y^2}{12} \quad (A.4)$$

$$D_1 = \int_0^1 f_1(\tilde{x})^2 d\tilde{x} = \int_0^1 (X(\tilde{x} - \frac{1}{2}))^2 d\tilde{x} = \frac{X^2}{12} \quad (A.5)$$

$$D_2 = \int_0^1 f_2(\tilde{y})^2 d\tilde{y} = \int_0^1 (Y(\tilde{y} - \frac{1}{2}))^2 d\tilde{y} = \frac{Y^2}{12}$$

よって、Sobol' 感度指標  $S_1$ ,  $S_2$  は次式で求められる。

$$S_1 = \frac{X^2}{X^2 + Y^2} - \frac{A^2 a^2}{A^2 a^2 + B^2 b^2} \quad (A.6)$$

$$S_2 = \frac{Y^2}{X^2 + Y^2} = \frac{B^2 b^2}{A^2 a^2 + B^2 b^2}$$