

# 翼・ディスク系の強制振動，自励振動，不釣り合い量の多目的最適化に関する研究

## Study on the Multi-Objective Optimization of Bladed Disks for Forced and Self-Excited Vibration and Amount of Unbalance

金子 康智\*<sup>1</sup>  
KANEKO Yasutomo

渡邊 敏生\*<sup>2</sup>  
WATANABE Toshio

古川 達也\*<sup>2</sup>  
FURUKAWA Tatsuya

### ABSTRACT

Although bladed disks are nominally designed to be cyclically symmetric (tuned system), the vibration characteristics of all blades on a disk are slightly different due to the manufacturing tolerance, deviations in the material properties, and wear during operation. These small variations break the cyclic symmetry and split the eigenvalue pairs. Bladed disks with small variations are referred to as a mistuned system. Many researchers suggest that while mistuning has an undesirable effect on the forced response, it has a beneficial (stabilizing) effect on blade flutter (the self-excited vibration). Therefore, it is necessary to optimize a bladed disk for forced vibration and blade flutter. In this study, a practical optimization method of mistuned bladed disks that optimizes the resonant stress, the amount of unbalance and the stability for the blade flutter. To verify the proposed optimization method, first, the original mistuned bladed disk, which has the maximum amplification factor, is generated by Monte Carlo simulations. Second, the optimal bladed disk with the minimum amplification factor and the amount of unbalance is searched by using Monte Carlo simulations and the genetic algorithm, while improving the stability for blade flutter. From the analysis results, the validity of the proposed optimization method is verified.

キーワード：強制振動，自励振動，不釣り合い振動，翼，ミスチューニング，最適化

Key words : Forced Vibration, Self-excited Vibration, Unbalance Vibration, Blade, Mistuning, Optimization

### 1. 緒言

ターボ機械の信頼性を向上させるためには、動翼に作用する運転中の振動応力を低減させることが不可欠である。このため、従来の翼の振動強度設計では、

- (1) 明瞭な加振力との共振を回避させる。
- (2) 動静翼間距離の拡大やクロッキングにより加振力を低減させる。
- (3) 非対称配置静翼構造を利用して加振力を低減させる<sup>(1),(2)</sup>。
- (4) 摩擦型ダンパなどを採用して構造減衰を増加させる<sup>(3),(4)</sup>。

などの対策が取られてきた。また、ミスチューンによる共振応答の増大効果を抑制するため、設計段階で個々の翼に意図的なミスチューン（インテンショナルミスチューン）を与え、工作誤差や材料定数の変動により生

じるランダムミスチューンの影響を緩和する方法も検討されている<sup>(5),(6)</sup>。

一方、軸流ターボ機械の動翼ではフラッタに対する安定性を確保することも重要であり、翼の振動強度設計では共振応力（強制振動）に対する安全率とフラッタ（自励振動）に対する裕度を同時に考慮することが必要である。このため著者らは、共振応力とフラッタの両方に対して振動強度上最適な翼・ディスク系を実現するための実用的な手法として、下記の手法を提案した<sup>(7)</sup>。

- (1) フラッタに対する安定性を確保するため、交互ミスチューン系、すなわち隣接翼の振動数を僅かに変化させた翼・ディスク系を設計する。
- (2) 製作後に個々の翼の固有振動数を計測する。
- (3) ランダムミスチューンの影響が小さくなるように、すなわち着目する共振応答が最小になるように、交互ミスチューンを保持したままディスク上の翼を並び替える。

さらに続報<sup>(8)</sup>においては、翼・ディスク系の振動強度だけでなく、軸振動の原因になる不釣り合い量も考慮して最適化を行う手法を検討した。この手法は、翼先端部をカットすることにより交互ミスチューン系を作成し易い

原稿受付 2022年10月17日

査読完了 2023年5月9日

\* 1 龍谷大学

〒520-2194 大津市瀬田大江町横谷1-5

E-mail: y\_kaneko@rins.ryukoku.ac.jp

\* 2 三菱重工業

〒676-8686 高砂市荒井町新浜2丁目1番1号

場合は実用的な信頼性向上策になり得ることを数値計算により確認しているが, 個々の翼の振動数のばらつきが大きい場合には敢えて交互ミスチューン系にしなくても, ディスク上の翼を並び替えるだけで, 強制振動 (共振応答), 自励振動 (フラッタ), 不釣合い量を同時に最適化できると考えられる。この観点から, 本研究では航空エンジン用のガスタービン動翼を対象にして, ディスク上の翼を並び替えることにより, 強制振動, 自励振動, 不釣合い量を同時に最適化できるかどうかを検討する。翼の最適配列を求めるためには, 翼・ディスク系の共振応答解析を繰り返し行うことが必要になるため, 前報と同様に低次元モデルFMM (Fundamental Mistuning Model)<sup>(9),(10)</sup>を利用する。最適化手法には, モンテカルロ法や遺伝的アルゴリズムの一種であるDDE (Discrete Differential Evolution) 法<sup>(11)</sup>を利用する。

## 2. 解析方法

### 2.1 FMMによるミスチューン系の固有値解析

FMMの理論については文献<sup>(9),(10)</sup>に詳しく説明されているので, ここでは要点だけを記述する。FMMでは, 翼・ディスク系のモード族が完全に分離しているとき, ミスチューンがある翼・ディスク系の着目するモード族の振動モードを, チューン系の当該モード族の振動モードの重ね合わせで式(1)のように表す。

$$\{\phi_r\} = \sum_{m=0}^{N-1} \beta_{rm} \{\phi_m^0\}, \quad (r = 0, \dots, N-1) \quad (1)$$

ここで,  $\{\phi_r\}$ はミスチューン系の着目するモード族における $r$ 次の振動モード,  $\{\phi_m^0\}$ はトラベリングウェーブモードで表示したチューン系の当該モード族の $m$ 次の振動モードであり,  $N$ は全周の翼枚数である。 $\beta_{rm}$ はミスチューン系の $r$ 次の振動モードに占めるチューン系の $m$ 次のトラベリングウェーブモードの振幅を表す係数 (以下, TWMの振幅) であり, 式(2)の固有値問題を解くことにより求めることができる。

$$[A^0 + \hat{A}]\{\beta_r\} = \omega_r^2 \{\beta_r\}, \quad (2)$$

$$[A^0] = [Q^0]^T [Q^0], \quad \hat{A} = 2[Q^0][\bar{Q}][Q^0]$$

ここで $[Q^0]$ は, チューン系の固有振動数を対角成分にする対角行列であり, チューン系の振動モードをトラベリングウェーブモードで表示し翼間位相差が増加する順に振動モードを並べたとき, これに対応する順に固有振動数を並べている。 $\omega_r$ はミスチューン系の $r$ 次の固有振動数である。 $[\bar{Q}]$ は, ディスク上の個々の翼の振動数分布の離散フーリエ変換を成分にする行列であり, 式(3)のように表すことができる。

$$[\bar{Q}] = \begin{bmatrix} \bar{\omega}_0 & \bar{\omega}_1 & \cdots & \bar{\omega}_{N-1} \\ \bar{\omega}_{N-1} & \bar{\omega}_0 & \cdots & \bar{\omega}_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\omega}_1 & \bar{\omega}_2 & \cdots & \bar{\omega}_0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$[\bar{Q}]$ は循環行列であり, その要素 $\bar{\omega}_p$ は, 翼単体の固有振動数 (着目するモード族の固有振動数) の周方向の分布を離散フーリエ変換したときの $p$ 番目の成分であり, 式(4)で表すことができる。

$$\bar{\omega}_p = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} \exp\left(isp \frac{2\pi}{N}\right) \Delta\omega_b^{(s)} \quad (4)$$

ここで,  $\Delta\omega_b^{(s)}$ はミスチューンにより生じた $s$ 番目の翼の固有振動数の偏差であり, チューン系の翼単体の固有振動数を $\omega_b^{(0)}$ , ミスチューン系の $s$ 番目の翼の固有振動数を $\omega_b^{(s)}$ とすると, 式(5)から求めることができる。

$$\Delta\omega_b^{(s)} = \frac{\omega_b^{(s)} - \omega_b^{(0)}}{\omega_b^{(0)}} \quad (5)$$

### 2.2 ミスチューン系の安定性解析

ミスチューン系の安定性を解析する場合には, 式(2)に流体連成効果を表す非定常力項を追加した式(6)の固有値解析を行い, 複素固有振動数 $\omega_r$ を求める。

$$[A^0 + \hat{A} - \omega_r^2 [I]]\{\beta_r\} = \{F^m\} \quad (6)$$

ここで $\{F^m\}$ は作動流体との連成による非定常力, すなわち翼・ディスク系 (チューン系) の振動によってフィードバックされる非定常力 (モーダル外力) であり, 式(7)のように表すことができる。

$$\{F^m\} = [A^m]\{\beta_r\} \quad (7)$$

式(7)右辺の $[A^m]$ は影響係数 $a_n$ を対角要素にする流体力行列であり, 式(8)のように表すことができる。

$$[A^m] = \begin{bmatrix} a_0 & & & 0 \\ & a_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{N-1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

式(8)の影響係数 $a_n$ は一般には複素数であり,  $n$ 節直径の振動モードに対する付加剛性や付加減衰に相当しており, CFDコードを利用して求めることができる。具体的にCFDコードを利用して影響係数 $a_n$ を求める際には, 動翼の1通路分をモデル化し, 隣接翼との境界に $n$ 節直径モードの翼間位相差を考慮した周期対称条件を与える。つぎに構造解析から得られる振動モードでCFD格子を移動させ, 翼面上にフィードバックされる非定常流体力の変位に比例する成分から付加剛性を, 速度に比例する成分から付加減衰を求める。式(6)から得られる $j$ 次モードの固有振動数の実部を $\omega_{jR}$ , 虚部を $\omega_{jI}$ とすると, 流体力による $j$ 次モードのモーダル減衰比 $\zeta_j$ は式(9)から求めることができる。

$$\zeta_j = \frac{\omega_{jI}}{\omega_{jR}} \quad (9)$$

モーダル減衰比 $\zeta_j$ が負であれば空力減衰は負であり, フラッタが発生する。

## 2.3 ミスチューン系の強制振動解析

ハーモニック加振力に対するミスチューン系の周波数応答を解析する場合には、式(2)に外力項を追加した式(10)を解析する。

$$[A^0 + \hat{A} - \omega^2 [L]] \{\beta_r\} = \{F^w\} \quad (10)$$

ここで、 $\{F^w\}$ は偏流や翼列干渉力のように作動流体との連成を考慮しない非定常力（モーダル外力）の振幅であり、 $\omega$ は加振力の周波数である。周波数応答を解析する場合はチューン系の $r$ 次のモードに対して構造減衰を導入するため、 $[A^0]$ の要素を式(11)で定義する。

$$A_{r,r}^0 = (\omega_r^0)^2 (1 + i2\zeta_r^0), \quad (11)$$

ここで、 $\omega_r^0$ と $\zeta_r^0$ はチューン系の $r$ 次のモードの固有振動数と減衰比である。式(10)からTWMの振幅が求まると、物理座標での周波数応答は式(12)から求めることができる。

$$\{X\} = [E]\{\beta_r\} \quad (12)$$

行列 $[E]$ は物理座標で表した変位とトラベリングウェーブモードで表した変位の座標変換行列であり、行列 $[E]$ の $k$ 行 $l$ 列の要素 $E_{k,l}$ は式(13)で表すことができる。

$$E_{k,l} = \exp\left(i\frac{2\pi kl}{N}5\right), \quad (k, l = 0, \dots, N-1) \quad (13)$$

## 2.4 ミスチューン系の不釣合い量の解析

翼・ディスク系を構成する $i$ 番目の翼の質量 $m_i$ を式(14)で定義すると、翼・ディスク系全体の不釣合い量 $U$ は式(15)から求めることができる。

$$m_i = m_0 + \Delta m_i \quad (14)$$

$$U = R_0 \sqrt{\left(\sum_{i=1}^N \Delta m_i \cos\theta_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^N \Delta m_i \sin\theta_i\right)^2} \quad (15)$$

ここで、 $m_0$ はディスク上の全翼の質量の平均値、 $\Delta m_i$ は $i$ 番目の翼の質量の偏差、 $\theta_i$ は1番目の翼を基準にして測った各翼の周方向の取付け角度である。翼の周方向の取付け角度については偏差が小さいと考え、 $\Delta\theta_i=0$ と仮定している。また、 $R_0$ は翼重心までの半径であり、各翼の重心は同一半径上にあると仮定している。なお、大型の翼では、各翼の重量と重心位置を計測してロータのバランスングを行うが、この場合は式(15)を式(16)のように変更すれば良い。ここで $R_i$ は $i$ 番目の翼の重心までの半径である。

$$U = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^N m_i R_i \cos\theta_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^N m_i R_i \sin\theta_i\right)^2} \quad (16)$$

## 2.5 最適ミスチューン系の定義

本研究では、翼の共振応力、フラッタに対する安定性、および軸振動の原因になる不釣合い量を同時に最適化する翼の配列（最適ミスチューン系）を求めるが、具体的には、式(17)の目的関数を最小にするミスチューン系を最適ミスチューン系と定義している。

$$Opt.index = C_A \cdot AF + C_U \cdot UF + C_D \cdot \Delta\zeta \quad (17)$$

$$UF = \frac{U_{aft}}{U_{ori}} \quad (18)$$

$$\Delta\zeta = -\frac{\zeta_{mis} - \zeta_{tune}}{\zeta_{Norm}} \quad (19)$$

ここで、 $AF$ はチューン系に対するミスチューン系の共振応答の増大率（Amplification factor）、 $UF$ は翼の配列を変更する前の不釣合い量 $U_{ori}$ と配列変更後の不釣合い量 $U_{aft}$ との比率である。 $\Delta\zeta$ はチューン系の空力減衰 $\zeta_{tune}$ に対するミスチューン系の空力減衰 $\zeta_{mis}$ の相対的な変化量であり、 $\zeta_{Norm}$ は正規化するための係数である。また、 $C_A$ 、 $C_U$ 、 $C_D$ はそれぞれ $AF$ 、 $UF$ 、 $\Delta\zeta$ に対する重み係数である。本研究では、提案する手法が実際の翼の開発に適用できるかどうかを検証することを目的としており、一番単純なケースとして、今回の計算では $C_A$ 、 $C_U$ 、 $C_D$ をどれも1.0にしている。また、式(17)の $AF$ 、 $UF$ 、 $\Delta\zeta$ のオーダーを同一にするため、 $\zeta_{Norm}=0.004$ にして最適計算をしている。すなわち、Fig. 4より安定化させるためには $(\zeta_{mis} - \zeta_{tune})$ の大きさが約0.004になると予想されるため、 $\zeta_{Norm}=0.004$ にしている。

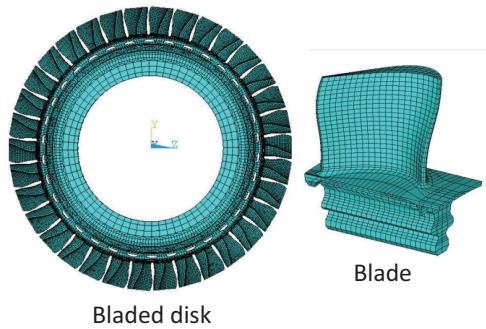
## 3. 解析結果

### 3.1 解析条件

Fig. 1に解析に使用した翼・ディスク系の有限要素モデルを、Fig. 2に周期対称法で解析したチューン系の固有振動数（キャンベル線図）を示す。Fig. 1の有限要素モデルの節点数は1セグメント当たり約7900節点であり、翼・ディスク系全体（ $N=34$ ）では約27万節点である。以下の解析では、強制振動については2次モード族と前置静翼枚数16とのノズルウェーク共振を解析対象にしており、周波数応答解析を行うときの翼・ディスク系の対数減衰率（ $\delta$ ）は全モードに対して0.01と仮定している。また、自励振動については1次モード族のフラッタに対する安定性を評価する。具体的には最適ミスチューン系の探索は、以下の手順で実施している。

- (1) 単独翼の固有振動数（ $i$ 次モード、 $i=1,2$ ）の分布が正規分布（Case 1: 変動係数 $\sigma_i=1\%$ 、Case 2: 変動係数 $\sigma_i=2\%$ ）に従い、1次モードと2次モードの固有振動数は無相関と仮定する。
- (2) モンテカルロ法を利用して1次モードに対する安定性解析と2次モードに対する共振応答解析を個別に行い、フラッタに対する安定性が最小（空力減衰最小）になる1次モードのミスチューン分布、2次モードの共振応答が最大になる2次モードのミスチューン

ン分布を求める。得られたワーストミスチューン系（フラッタに対する安定性が最小，2次モードの共振応答が最大になるミスチューン系）をオリジナルのミスチューン系と定義する。



Bladed disk

Blade

Fig. 1 FEA model of bladed disk

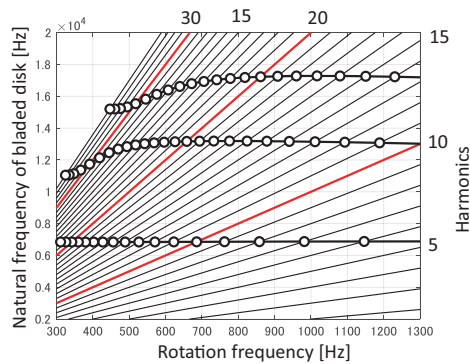


Fig. 2 Campbell diagram of tuned bladed disk

- (3) 翼の質量と固有振動数は無相関であり，翼の質量分布も正規分布（Case 1：変動係数  $\sigma_m = 1\%$ ，Case 2：変動係数  $\sigma_m = 2\%$ ）に従うと仮定し，オリジナルのミスチューン系の翼質量分布（の分布）を生成する。
- (4) 上記の2ケース（Case 1，Case 2）についてモンテカルロ法やDDEを適用して式(17)を最小にする最適解を求める。すなわち，翼の共振応力AFと軸振動の原因になる不釣合い量UFを可能な限り小さくし，空力減衰  $\Delta\zeta$  を可能な限り大きくする翼の配列（最適ミスチューン系）を求める。

Fig. 3は1次モードの安定性解析に使用した非定常流体力（空力減衰）であり，横軸は振動モードの節直径数を，縦軸は空力減衰（式(6)の非定常流体力  $\{F^m\}$  の虚部）を示している。タービン翼列では翼に作用する非定常流体力は当該翼と隣接翼の影響を強く受けるため，概ねFig. 3のような特性を示す。このため本研究では，既報<sup>(8)</sup>で使用したCFD解析結果の横軸（節直径数）を補正して使用している。Fig. 4は式(6)の複素固有値解析から求めたチューン系の安定性解析結果であり，横軸は流体-構造連成系の固有振動数を，縦軸は空力減衰を示している。Fig. 3やFig. 4から分かるように，この翼・ディスク系（チューン系）では-1節直径モードから-11節

直径モードまでの空力減衰は負（不安定）であり，最も空力減衰の値が小さいモードは-6節直径モード（ $\zeta_{tune} = -0.349\%$ ）になっている。

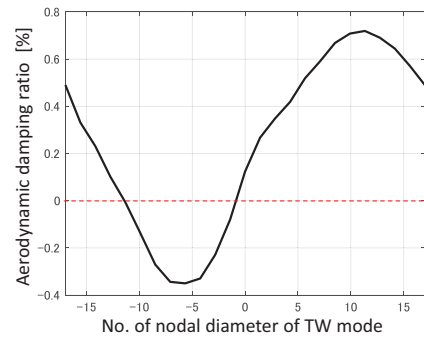


Fig. 3 Aerodynamic damping of tuned bladed disk

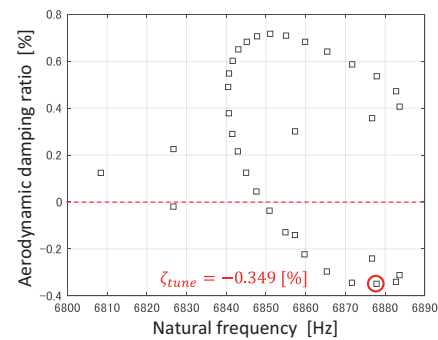


Fig. 4 Stability of tuned bladed disk

### 3.2 Case 1（翼振動数と翼質量の変動係数が1%）のときの解析結果

Fig. 5からFig. 7に，個々の翼の1次モードと2次モードの固有振動数の変動が正規分布（変動係数  $\sigma_i = 1\%$ ）に従うと仮定し，FMMとモンテカルロ法（解析回数10,000回）でワーストミスチューン系を求めた結果を示す。Fig. 5は，ワーストミスチューン系（フラッタに対する安定性が最小，2次モードの共振応答が最大になるミスチューン系）に対するミスチューン分布（固有振動数の分布）を，Fig. 6はワーストミスチューン系の1次モードの安定性解析結果を，Fig. 7は2次モードの周波数応答解析結果を示す。

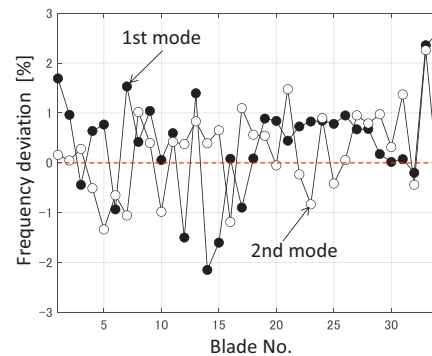


Fig. 5 Frequency deviation of the worst mistuned bladed disk (Case 1)

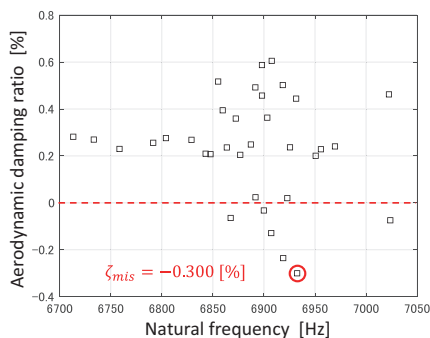


Fig. 6 Stability of the worst mistuned bladed disk (Case 1)

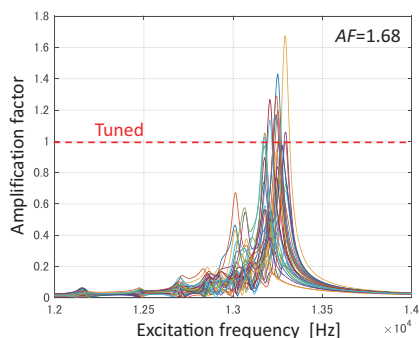


Fig. 7 Frequency response of the worst mistuned bladed disk (Case 1)

Fig. 4とFig. 6の比較から分かるように、ワーストミスチューン系ではフラッタに対する安定性は改善されているが幾つかのモードの減衰は依然として負であり、空力減衰の最小値は $\zeta_{mis} = -0.300\%$ になっている。また、Fig. 7に示すように、ワーストミスチューン系では2次モードの共振応答はチューン系の1.68倍に増大している。

Fig. 8には、翼の固有振動数の分布 (Fig. 5) と質量の分布との間には相関はなく、質量の分布は正規分布 (変動係数 $\sigma_m = 1\%$ ) に従うと仮定して生成した各翼の質量分布を示している。Case 1の解析では、Fig. 5からFig. 8の特性を持つワーストミスチューン系をオリジナルのミスチューン系と定義し、ディスク上の翼の配列を変えることにより、翼列干渉力に対する2次モードの共振応答倍率 $AF$ と軸振動の原因になる不釣り合い量 $UF$ を小さくし、空力減衰 $\Delta\zeta$ を大きくする翼の配列 (最適ミスチューン系) を求めている。

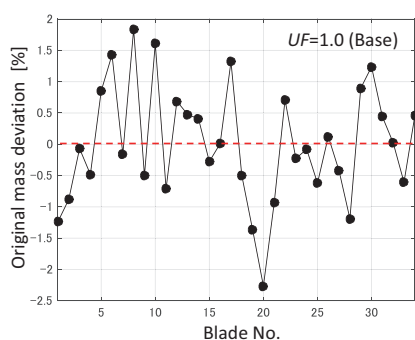


Fig. 8 Blade mass distribution of the worst mistuned bladed disk (Case 1)

Fig. 9とFig. 10はモンテカルロ法 (解析回数10,000回) を利用してCase 1に対する最適ミスチューン系を求めた結果であり、Fig. 9は2次モードの共振応答倍率 $AF$ と $UF$ のマップを、Fig. 10は $AF$ と1次モードの空力減衰 $\zeta_{mis}$ のマップを示している。Fig. 9から分かるようにオリジナルのミスチューン系 (図中の青丸,  $UF=1.00$ ,  $AF=1.68$ ) に対して最適ミスチューン系 (図中の赤丸, 式(17)の $Opt. index$ が最小になるミスチューン系) では、 $UF$ は0.0355に、 $AF$ は1.39に低下している。

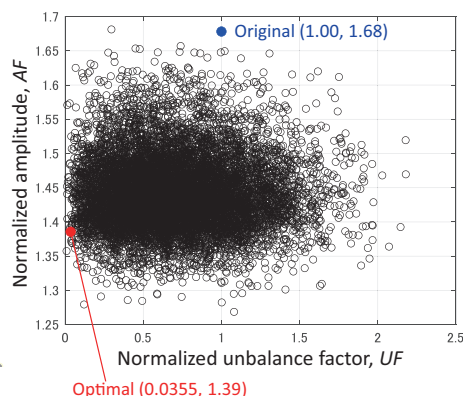


Fig. 9 Map of unbalance factor and amplification factor (Case 1)

また、Fig. 10から分かるように、最適ミスチューン系の空力減衰 (図中の赤丸) は依然として負であるが、オリジナルのミスチューン系の空力減衰 (図中の青丸)  $\zeta_{mis} = -0.300\%$  に対して最適ミスチューン系では、空力減衰の値は $-0.0589\%$ まで増加している。

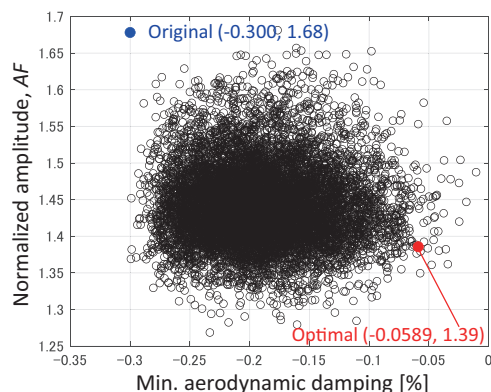


Fig. 10 Map of aerodynamic damping and amplification factor (Case 1)

Fig. 11はモンテカルロ法で求めた最適ミスチューン系の翼質量の分布と従来のバランス法で翼を配置したときの翼質量の分布を示しており、Fig. 11中にはそれぞれの方法で翼を配置した時の不釣り合い量の値 (式(18)の $UF$ ) も記入している。従来のバランス法では、翼質量の小さい順に翼を並べ、翼質量の近い翼同士が $180^\circ$  対抗する位置に来るように翼を配置している。Fig. 11から分かるように、従来のバランス法では $UF=0.183$ であり、オリジナルの状態 ( $UF=1.00$ ) に比べると不釣り合い

量は低減しているが，依然として不釣り合い量が残っている。一方，提案する手法では，翼列干渉力との共振応答倍率 ( $AF$ ) を1.68から1.39まで低減させ空力減衰の値を $-0.300\%$ から $-0.0589\%$ まで増加させるとともに，不釣り合い量についても $UF=0.0355$  (従来のバランス法の $19\%$ ) に低減できている。

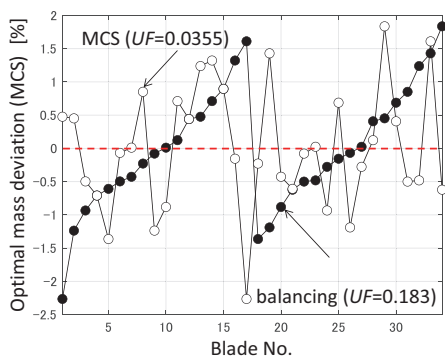


Fig. 11 Mass distribution of the optimal bladed disk (Case 1)

Fig. 12からFig. 14は，DDEを利用してCase 1に対する最適ミスチューン系を求めた結果を示している。DDEを利用した最適ミスチューン系の探索では，個体数100，反復回数 (世代数) 300，突然変異確率0.70，交叉確率0.85にして解析した。これらのパラメータを変更した計算も行ったが，最終的に得られる最適化指標 $Opt. index$  (式(17)) の値には有意な差がなかった。Fig. 12にはCase 1についてDDEで最適化計算を行ったときの最適化指標 $Opt. index$ の収束状況を示しており，Fig. 13は最適ミスチューン系に対する安定性解析結果を，Fig. 14は周波数応答解析結果を示している。Fig. 13に示すように，最適ミスチューン系の空力減衰は依然として僅かに負であるが，オリジナルのミスチューン系の空力減衰 (Fig. 6)  $\zeta_{mis} = -0.300\%$ に対して最適ミスチューン系では，空力減衰の値は $-0.0165\%$ まで増加している。また，Fig. 7とFig. 14の比較から分かるように，2次モードの共振応答倍率 $AF$ は1.68から1.44に低下している。紙面の制約からDDEで求めた最適解に対する翼の質量分布の解析結果 (Fig. 11に対応する結果) は省略しているが，DDEで求めた最適ミスチューン系とモンテカルロ法で求めた最適ミスチューン系では，共振応答，空力減衰，不釣り合い量の何れについても，ほぼ同等の値になることが確認できた。なお，空力減衰の値については，何れの最適化手法を用いても改善はできているが，全てのモードの空力減衰を正にすることはできていない。これは，Fig. 4に示すように，チューン系の空力減衰の最小値を $-0.349\%$  (対数減衰率に換算して $-0.02$ ) と仮定しており，すなわちチューン系に対して大きな負減衰を仮定しているため， $1\%$ のランダムミスチューン系では，翼の並び替えを行うだけでは安定化できないためと考えられる。

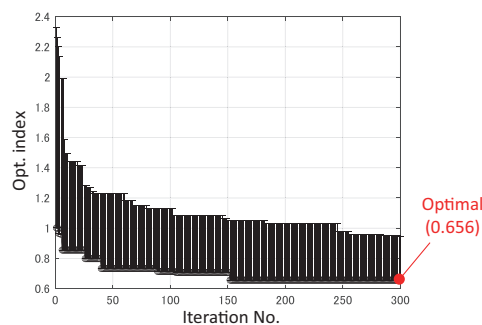


Fig. 12 Convergence of optimal index by DDE

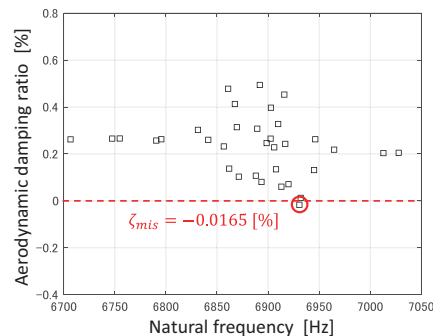


Fig. 13 Stability of the optimal mistuned bladed disk (Case 1, DDE)

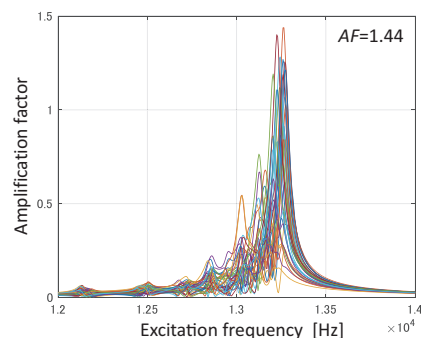


Fig. 14 Frequency response of the optimal mistuned bladed disk (Case 1, DDE)

### 3.3 Case 2 (翼振動数と翼質量の変動係数が $2\%$ )のときの解析結果

Case 2の解析もCase 1と全く同様に，最初に，個々の翼の1次モードと2次モードの固有振動数の変動が独立の正規分布 (変動係数 $\sigma_i = 2\%$ ) に従うと仮定し，FMMとモンテカルロ法 (解析回数10,000回) によりワーストミスチューン系 (フラッタに対する安定性が最小，2次モードの共振応答が最大になるミスチューン系)) を求めた。

Fig. 15はワーストミスチューン系の1次モードの安定性解析結果を，Fig. 16は2次モードの周波数応答解析結果を示している。Fig. 6とFig. 15の比較から分かるように，翼の固有振動数の変動係数を $2\%$ にすると，ワーストミスチューン系の1次モードの安定性は $-0.300\%$  (Fig. 6) から $-0.269\%$ に改善されているが，依然として空力減衰の値は負 (不安定) になっている。一

方, Fig. 7とFig. 16の比較から分かるように, 変動係数を2%にするとワーストミスチューン系の2次モードの共振応答倍率は1.68 (Fig. 7) から1.81まで増大している。Case 2の解析では, Fig. 15, Fig. 16の特性を持つワーストミスチューン系をオリジナルのミスチューン系と定義し, ディスク上の翼の配列を変えることにより, 翼列干渉力に対する2次モードの共振応答倍率 $AF$ と軸振動の原因になる不釣り合い量 $UF$ を小さくし, 空力減衰 $\Delta\zeta$ を大きくする翼の配列 (最適ミスチューン系) を求めている。

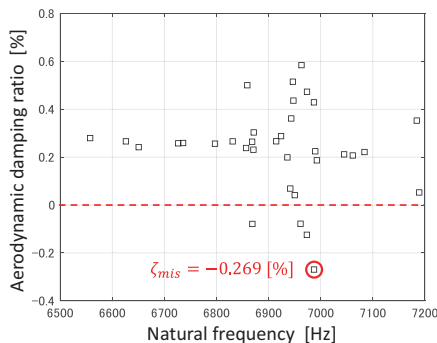


Fig. 15 Stability of the worst mistuned bladed disk (Case 2)

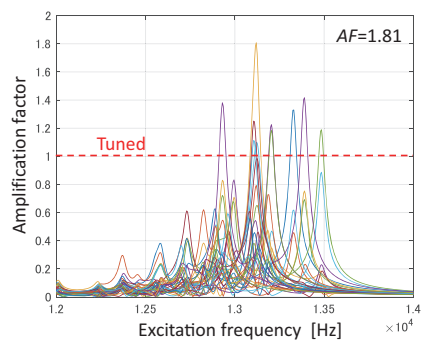


Fig. 16 Frequency response of the worst mistuned bladed disk (Case 2)

Fig. 17とFig. 18はモンテカルロ法 (解析回数10,000回) を利用してCase 2に対する最適ミスチューン系を求めた結果であり, Fig. 17は2次モードの共振応答倍率 $AF$ と $UF$ のマップを, Fig. 18は $AF$ と1次モードの空力減衰 $\zeta_{mis}$ のマップを示している。Fig. 17から分かるようにオリジナルのミスチューン系 (図中の青丸,  $UF=1.00$ ,  $AF=1.81$ ) に対して最適ミスチューン系 (図中の赤丸) では,  $UF$ は0.0480に,  $AF$ は1.39に低下している。また, Fig. 18から分かるように, 最適ミスチューン系の空力減衰 (図中の赤丸) は $\zeta_{mis}=-0.0718\%$ まで増加しており, 翼・ディスク系は十分に安定化されている。

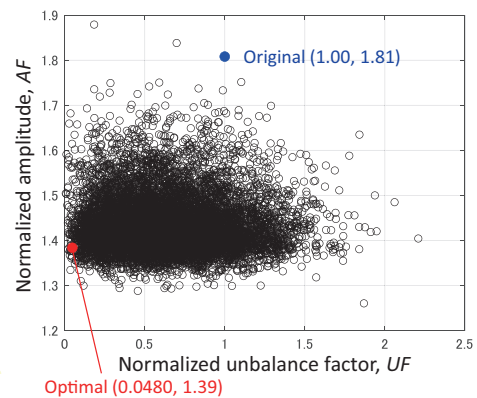


Fig. 17 Map of unbalance factor and amplification factor

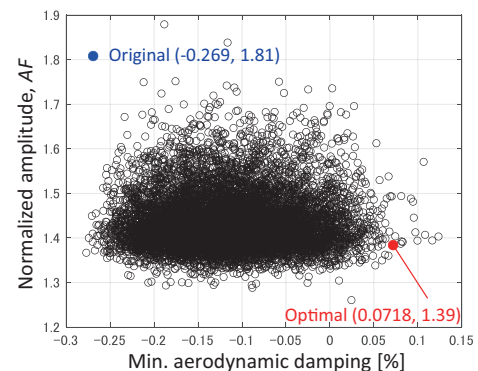


Fig. 18 Map of aerodynamic damping and amplification factor

Fig. 19とFig. 20は, DDEを利用してCase 2に対する最適ミスチューン系を求めた結果を示している。DDEの計算に使用したパラメータはCase 1と同様であり, Fig. 19は最適ミスチューン系に対する安定性解析結果を, Fig. 20は周波数応答解析結果を示している。Fig. 19に示すように, 最適ミスチューン系の空力減衰は $\zeta_{mis}=0.109\%$ まで増加しており十分に安定化されているだけでなく, 個々の振動モードの空力減衰のバラツキも小さくなっている。すなわち, Fig. 4 (チューン系) とFig. 19の比較から分かるように, 最適解では空力減衰が最小であった振動モードの空力減衰は増加し, 空力減衰が最大であった振動モードの空力減衰は減少している。その結果, 全てのモードの空力減衰がほぼ同一になり安定化されている。またFig. 16とFig. 20の比較から分かるように, オリジナルのミスチューン系 (Fig. 16,  $AF=1.81$ ) に対して最適ミスチューン系 (Fig. 20) では最大共振応答が1.37まで低下するとともに, 全翼の共振幅のバラツキが小さくなっている。

紙面の制約から最適解に対する翼の質量分布の解析結果は省略しているが, Case 2についてもCase 1と同様に, DDEで求めた最適ミスチューン系とモンテカルロ法で求めた最適ミスチューン系では, 共振応答, 空力減衰, 不釣り合い量の何れについても, ほぼ同等の値になることが確認できた。特に空力減衰については, チューン系に対して大きな負減衰を仮定しているため1%のランダムミスチューン系 (Case 1) では翼の並び替えを行うだけ

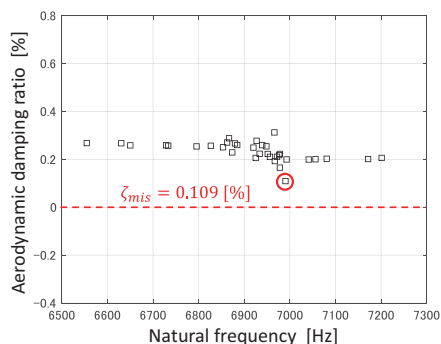


Fig. 19 Stability of the optimal mistuned bladed disk (Case 2, DDE)

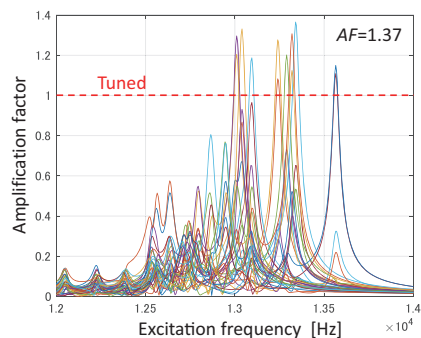


Fig. 20 Frequency response of the optimal mistuned bladed disk (Case 2, DDE)

では安定化できなかったが、2%のランダムミスチューンがある場合には、交互ミスチューンを採用しなくてもディスク上の翼を並び替えるだけで共振応答と不釣り合い量を最小化すると同時に、空力減衰の値を正にして安定化できることが確認できた。

#### 4. 結論

本研究では、強制振動, 自励振動, 不釣り合い量を考慮したタービン動翼の最適化手法を提案した。具体的には、加振試験から得られる各翼の固有振動数分布と重量計測から得られる各翼の質量分布を用いて、ディスク上の翼の配列を変更することにより共振応答, 不釣り合い量, 空力減衰を同時に最適化した。提案した手法の有効性を検証するため、航空エンジン用のガスタービン動翼の翼・ディスク系に対して最適ミスチューン系を求めた。その結果、提案した手法を適用すると、交互ミスチューンを採用しなくてもディスク上の翼を並び替えるだけで共振応答と不釣り合い量を最小化すると同時に、空力減衰の値を正にして安定化できることが確認できた。

本手法では、従来、品質管理を目的に計測していた翼の固有振動数と重量だけを利用しており、本手法を設計開発プロセスに組み込めば、コストを増加させることなく、製品の信頼性向上に寄与できると考えられる。

#### 参考文献

- (1) 金子康智, 森一石, 奥井英貴, 非対称配置静翼を利用した圧縮機動翼の振動応力低減, 日本機械学会論文集C編, Vol. 71, No. 712 (2005), pp. 3409-3416.
- (2) Sun, T., Hou, A., Zhang, M., Niu, Y., Gao, J. and Guo, H., Analysis on the Reduction of Rotor Blade Vibration Using Asymmetric Vane Spacing, Proceedings of ASME Turb Expo 2015, GT2015-42778 (2015).
- (3) Cigeroglu, E., An, N. and Menq, C-H, Wedge Damper Modeling and Forced Response Prediction of Frictionally Constrained Blades, Proceedings of ASME Turb Expo 2007, GT2007-27963 (2007).
- (4) Petrov, E. P., A high-accuracy model reduction for analysis of nonlinear vibrations in structures with contact interfaces, Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, Vol. 133, No. 10 (2011), 102503.
- (5) Han, Y., Murthy, R., Mignolet, M. P. and Lentz, J., Optimization of Intentional Mistuning Patterns for the Mitigation of the Effects of Random Mistuning, ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Powers, Vol. 136 (2014), pp. 1-9.
- (6) Hohl, A. and Wallaschek, J., A Method to Reduce the Energy Localization in Mistuned Bladed Disks by Application - Specific Blade Pattern Arrangement, Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Gas Turbines and Powers, Vol. 138 (2016), pp. 1-10.
- (7) 金子康智, 岸本星太, 森一石, 大山宏治, ミスチューンを有する翼・ディスク系の最適設計に関する研究, 日本機械学会論文集, Vol. 84, No. 861 (2018), DOI:10.1299/transjsme.17-00447.
- (8) 金子康智, 吉田陸, 渡邊敏生, 古川達也, ミスチューンを有する翼・ディスク系の最適設計 (強制振動, 自励振動, 不釣り合い量の同時最適化), 日本機械学会論文集, Vol. 87, No. 898 (2021), DOI:10.1299/transjsme.20-00368.
- (9) Feiner, D. M. and Griffin, J. H., A fundamental model of mistuning for a single family of modes, Transactions of the ASME, Journal of Turbomachinery, Vol.124 (2002), pp. 597-605.
- (10) Feiner, D. M. and Griffin, J. H., Mistuning identification of bladed disks using a fundamental mistuning model-part 1: theory, Transactions of the ASME, Journal of Turbomachinery, Vol. 126 (2004), pp. 150-158.
- (11) 北山哲士, 荒川雅生, 山崎光悦, Discrete Differential Evolutionの提案, 日本機械学会論文集C編, Vol. 76, No. 772 (2010), pp. 3828-3836.